分类号：0231.2　　0415.5　　　　　　单位代码：10422

密　级：公开　　　　　　　　　　　　学　　号：200712400

山东大学

博士学位论文

论文题目：复动力系统的空间分形控制与混沌同步

Spatial Fractal Control and Chaotic Synchronization in Complex Dynamical System

作者姓名　刘　平

学院名称　控制科学与工程学院

专业名称　系统工程

指导教师　刘树堂教授

合作导师

2012年　5月　15日

Spatial Fractal control and Chaotic Synchronization in Complex Dynamical system

by

Ping Liu

Supervisor

Prof. **Shu Tang Liu**

A Dissertation Submitted to the Faculty of the
SCHOOL OF CONTROL SCIENCE AND ENGINEERING
In Partial Fulfillment of the Requirements
For the Degree of
DOCTOR OF
PHILOSOPHY IN ENGINEERING
In the Graduate College
SHANDONG UNIVERSITY

May 15, 2012

原 创 性 声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的科研成果。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律责任由本人承担。

论文作者签名：刘平 日 期：2012. 5. 16

关于学位论文使用授权的声明

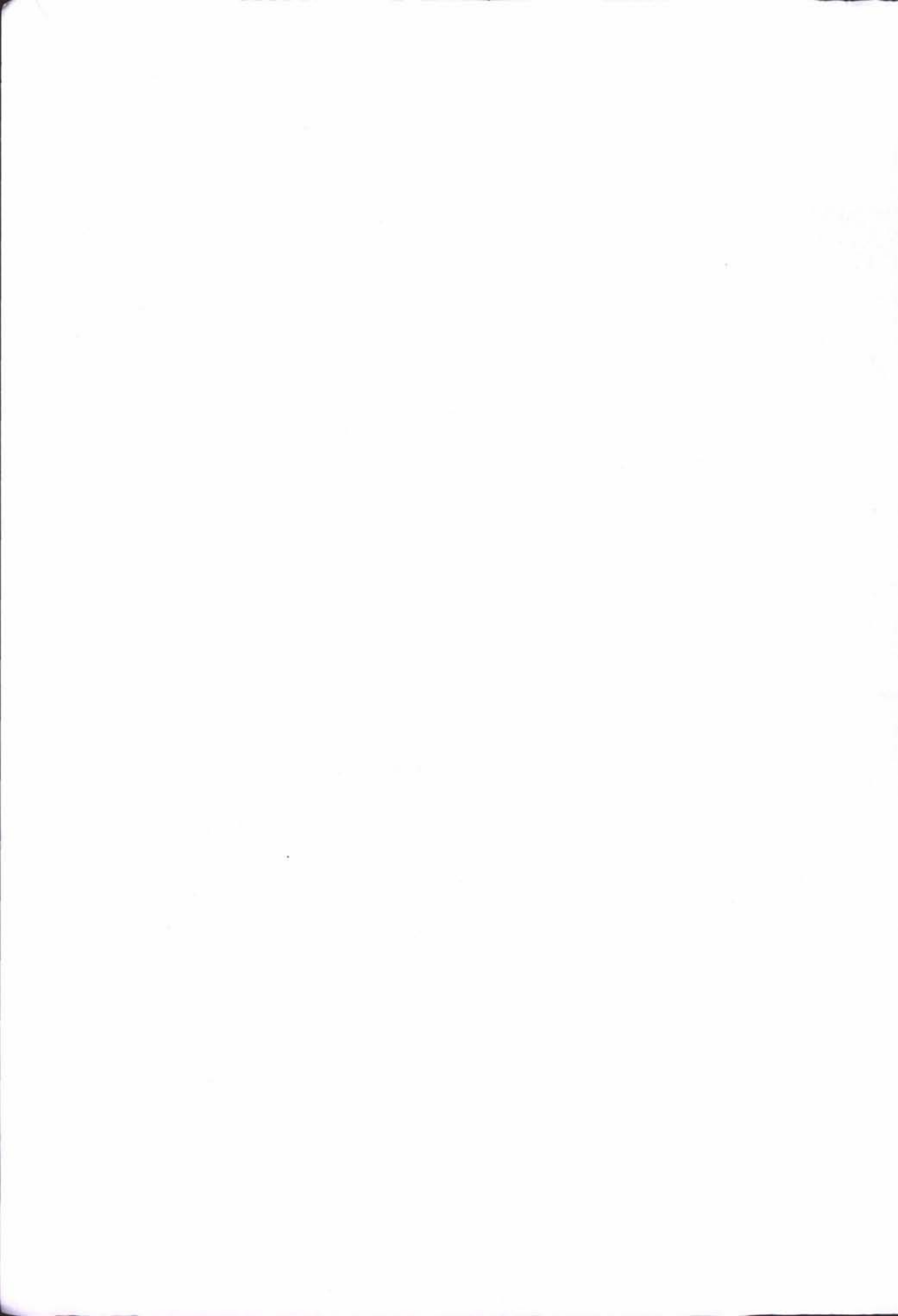
本人同意学校保留或向国家有关部门或机构送交论文的印刷件和电子版，允许论文被查阅和借阅；本人授权山东大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文和汇编本学位论文。

(保密论文在解密后应遵守此规定)

论文作者签名：刘平 导师签名：刘路星 日 期：2012. 5. 16

目 录

Contents



摘　要

复动力系统主要研究解析函数的迭代问题，它的主要研究对象 Julia 集一般具有分形结构，而产生 Julia 集的迭代动力系统具有混沌特性，因此它与混沌、分形等研究领域有着紧密的联系. 本论文主要对复动力系统的定性理论、控制和同步进行了一系列的基础研究，主要包括空间 Julia 集的控制和同步以及混沌复系统的同步.

1. 耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制与同步

基于平面分形集-Julia 集的吸引不动点的理论，给出了耦合映像格子模型的空间 Julia 集不动平面的稳定条件. 在不动平面已知的情况下，分别利用梯度控制和辅助参考控制的方法，使耦合映像格子模型的空间 Julia 集的不动平面达到稳定. 但在很多情况下不动平面不易求出，对于这样的系统可以利用最优函数控制方法，控制其不稳定不动平面为稳定平面. 继而，分别利用梯度控制和最优函数控制方法，控制两个不同的耦合映像格子模型的空间 Julia 集的轨迹实现同步，从而实现了空间 Julia 集的同步. 最后，利用线性耦合的方法，实现两个不同的耦合映像格子模型的空间 Julia 集的轨迹的耦合同步，进而实现空间 Julia 集的耦合.

2. 空间混沌 Julia 集的控制与同步

基于平面分形集-Julia 集的基本性质，给出了空间混沌 Julia 集的性质和其不动平面稳定的复参数 c 的稳定区域. 利用辅助参考控制的方法，根据不动平面稳定的条件，获得控制参数的范围，以实现空间混沌 Julia 集的控制. 同时，给出了两个不同空间混沌 Julia 集的广义同步定义，利用线性反馈的方法，使其广义同步误差系统镇定到稳定的不动平面，实现了不同空间混沌 Julia 集的线性广义同步. 通过构造多变量多项式的变换，并利用非线性反馈的方法，实现了不同空间混沌 Julia 集的非线性广义同步.

3. 新的复类 Lorenz 系统的基本性质及其反同步

基于混沌实系统的判定和基本性质，构造了一个新的复类 Lorenz 系统，详

细地分析了它的基本动态特性, 并分别利用主动控制和反馈控制的方法实现了新的复类 Lorenz 系统的反同步. 这两种方法具有控制器设计过程简单易行、计算量小等特点, 但反馈控制优于主动控制方法, 因为反馈控制更易于达到人们的目的, 计算更简单. 数值仿真验证了这两种方法实现新的复类 Lorenz 系统的反同步是可行的.

4. 含有未知参数的混沌复系统的自适应反同步

用一般的数学表达式描述了带有未知参数的不确定混沌复系统. 基于 Lyapunov 稳定理论, 利用自适应控制方法, 实现了这类系统的反同步, 并给出了自适应控制器和未知参数估计的具体表达式, 并将结论分别成功地应用于实现两个不同和相同的不确定混沌复系统的反同步.

5. 基于状态观测器的混沌复系统的投影同步

首先假设了不确定混沌复系统的输出, 并基于其输出构造了此混沌复系统的非线性状态观测器. 根据极点配置方法和 Lyapunov 稳定理论, 得到了反馈增益矩阵, 使该混沌复系统和其状态观测器实现投影同步. 将该结论成功地应用于两个带有不确定项的混沌复系统.

6. 含有扰动的混沌复系统的鲁棒自适应全状态混合投影同步

基于混沌实系统的全状态混合投影同步的定义, 给出了混沌复系统全状态混合投影同步的定义. 用一般的数学表达式描述了带有扰动的不确定混沌复系统, 然后基于 Lyapunov 稳定理论和构造的补偿器, 利用非线性控制和自适应控制方法, 设计了实现混合投影同步的控制器和参数自适应率, 给出了具体的数学表达式, 并实现了不确定混沌复系统的全状态混合投影同步, 使其状态误差收敛到一个较小的界内. 最后将这个结论分别成功地应用于实现两个不同和相同的带有外部扰动的不确定混沌复系统的全状态混合投影同步.

综上, 本论文围绕空间分形集和混沌复系统展开了研究, 将控制引入到空间分形, 对进一步研究空间分形和解释复杂的现象具有重要的意义; 实现了混沌复系统的多类同步, 为进一步加强通讯安全奠定了理论基础.

关键词： 复系统; 耦合映像格子; 空间 Julia 集; 混沌同步; Lyapunov 稳定理论

ABSTRACT

The complex dynamical system mainly studies the iteration of analytic functions. Its main object is the Julia set with a fractal structure generally, and the map used to produce Julia sets is chaotic. So it is closely linked with chaos and fractal. This paper focuses on the qualitative theory of the complex dynamical system and a series of basic researches on its control and synchronization, including control and synchronization of spatial Julia sets and synchronization of chaotic complex systems.

1. Control and synchronization of Julia sets in coupled map lattice

Based on the stability theory of fixed points for the classical Julia set, the stable condition of the fixed plane for the Julia set in coupled map lattice was given. As the fixed plane was known, the gradient control and auxiliary reference control was respectively used to control the stability of the fixed plane. But in many practical circumstances, the fixed plane was not easily obtained. For such systems, the optimal function control is applied to control the stability. In addition, the synchronization of two different Julia sets in coupled map lattice was also achieved by synchronizing their movement trajectories using the gradient control and optimal function control respectively. At last, the coupling of two different Julia sets in coupled map lattice was also analyzed by coupling their movement trajectories using the linear coupling.

2. Control and synchronization of spatial chaotic Julia sets

Based on the basic properties of the classical Julia set, the properties of spatial chaotic Julia sets and the stable regions of the complex parameter c were given. According to the stable conditions of the fixed plane, the scope of the control parameter was obtained by using the auxiliary reference control so as to control the spatial chaotic Julia set. Moreover, the definition of the generalized synchronization between two different spatial chaotic Julia sets was given. The linear generalized synchronization of spatial Julia sets was achieved by linear feedback control. In

addition, the nonlinear generalized synchronization of spatial chaotic Julia sets was also analysed by constructing a multivariate polynomial transformation and using nonlinear feedback control.

3. Anti-synchronization of a new complex Lorenz-like system and its dynamical properties

Based on chaotic real systems and their basic properties, a new complex Lorenz-like system was constructed and its dynamical properties was also discussed. The anti-synchronization of the new complex Lorenz-like systems was separately investigated by active control and nonlinear control methods. Although the both methods used to achieve the anti-synchronization of the new complex Lorenz-like system were simple, nonlinear control was preferable for personal purposes and simpler for computations. Numerical simulations verified that both methods are effective.

4. Adaptive anti-synchronization of chaotic complex systems with unknown parameters

The adaptive anti-synchronization of a class of chaotic complex systems with fully uncertain parameters, which were described by a united mathematical expression was presented. Based on Lyapunov stability theory, we developed an adaptive control scheme and adaptive laws of parameters to anti-synchronize two unknown chaotic complex systems. The anti-synchronization of two identical complex Lorenz systems and two different complex Chen and L*ü* systems were taken as two examples to verify the feasibility and effectiveness of the presented scheme.

5. Observer-based projective synchronization of chaotic complex systems

Based on the assumed output of the uncertain chaotic complex system, its observer was designed. According to the nonlinear state observer and the pole placement technique, we got the feedback gain matrix and achieved the projective synchronization between uncertain chaotic complex systems and its observer. The proposed synchronization scheme was confirmed by numerical simulations of two well known chaotic complex systems.

6. Robust adaptive full state hybrid projective synchronization of chaotic com-

plex systems with unknown parameters and external disturbances

Based on the definition of full state hybrid projective synchronization (FSHPS) of chaotic real system, we gave the definition of FSHPS of chaotic complex system. By introducing a dynamic compensator and using nonlinear control and adaptive control, we proposed the robust adaptive FSHPS scheme, which can achieve adaptive FSHPS of two different chaotic complex systems asymptotically with a small error bound. The adaptive laws of the unknown parameters were given, and the sufficient conditions of realizing FSHPS were derived as well. Finally, the proposed control scheme was successfully applied to two identical chaotic complex systems and two different chaotic complex systems.

In conclusion, this dissertation focuses on the controls of spatial fractal sets and synchronization of chaotic complex systems. The control was introduced successfully into the spatial Fractal, which had important practical significance to further study the spatial fractal and explain the more complex phenomena. All kinds of synchronization of chaotic complex systems was achieved firstly, which provided theoretical basis for further enhancing the security of communications.

Keywords: Complex system; coupled map lattice; Spatial Julia sets; Chaotic synchronization; Lyapunov stable theory

第一章　绪论

复动力系统是用复分析的方法研究动力系统, 属于复分析与动力系统的交叉学科. 作为动力系统的一个分支, 复动力系统与自然、人们的生活紧密相连. 目前, 复动力系统已被广泛的应用到生物、金融及其工程等多个学科当中, 它与分形几何、混沌理论以及分叉理论等领域有着紧密的联系, 是目前研究的热点.

1.1　关于分形

自从 20 世纪 70 年代, Mandelbrot 和 Julia 开始复动力系统的研究以来, 关于复动力系统的研究主要涉及到 Julia 集和 Mandelbrot 集的基本理论, 例如 Julia 集和 Mandelbrot 集的主要理论分析、四元数 Julia 集和 Mandelbrot 集的基本理论以及它们的控制和各种应用[1–20], 并逐步的形成了分形的基本特性. 一般地, 分形具有精细的结构, 是不规则的, 有某种自相似的形式, 由迭代产生[21].

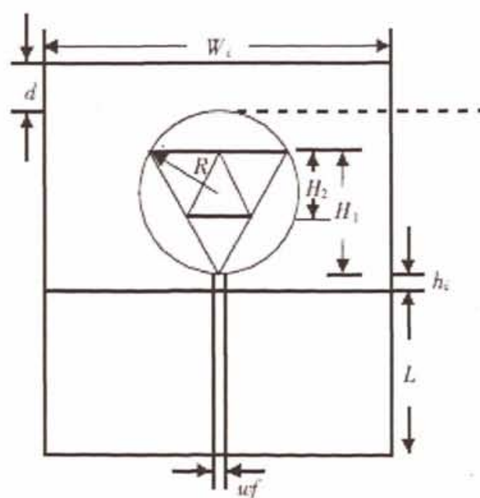


图 1.1: 基于 Sierpinski 结构的超宽带分形天线结构图.

分形已被广泛的应用于信息科学、物理学、地理学、生物学、气象学以

及机械工程中，例如分形天线，使其尺寸得到减缩，能增加其工作频带，尤其是具有多频带特性的 Sierpinski 分形天线(图 1.1)，已被用于无线、卫星和移动通信系统中. 分形也被用于研究砂岩孔隙结构及其相对应的石油分形分布(图 1.2)，利用砂岩孔隙结构的分形特征对水驱油采收率的影响，以便于理论上指导石油开采的经济效益. 分形还能用于描述和预示不同生态系统的演化，有助

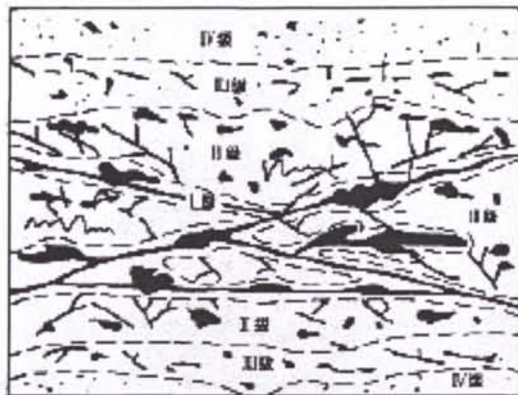


图 1.2: 石油分形分布图.

于理解正常活细胞的结构和癌组织的细胞结构，可以通过建立患病组织相像的分形生长模型(图 1.3)，了解存在于基因密码的控制生长的信息. 如果对这种生长的信息进行控制，癌组织的细胞就有可能被治愈或者控制在一个稳定区.

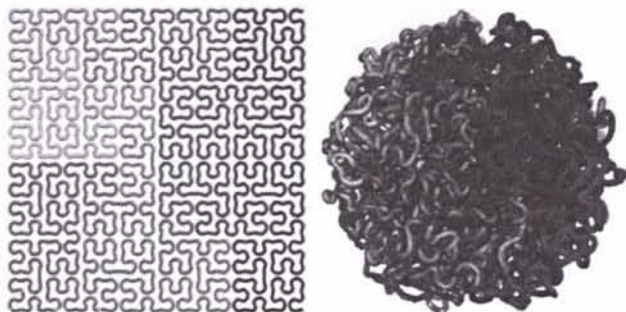


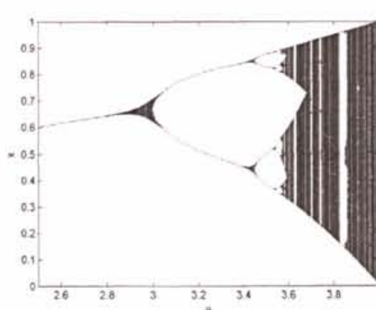
图 1.3: 癌细胞的分形生长图.

1.2　关于一维混沌和空间混沌

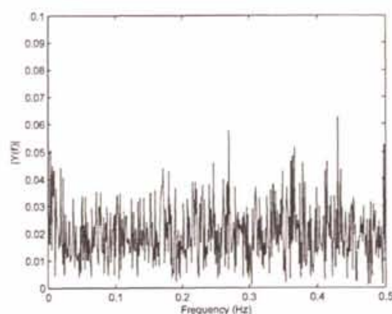
关于一维混沌, 例如经典的 1-D Logistic 映射[22]

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n), \tag{1.2.1}$$

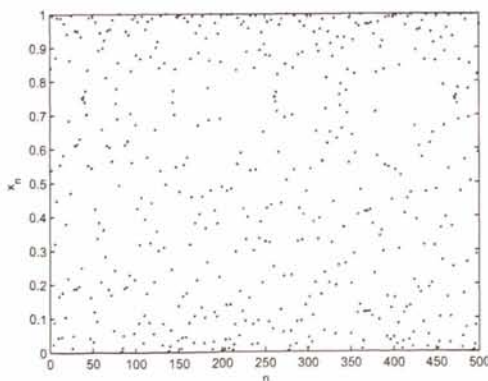
其中 μ 是大于零的实数. Logistic 映射 (1.2.1) 的倍周期分叉, 功率谱和混沌行为如图 1.4 所示. 由图 1.4(a) 可见, 当控制参数 $\mu > 3.57$ 时, Logistic 映射由倍周期分叉进入混沌行为, 其中 x 的取值范围为 $0 \leq x \leq 1$, 控制参数的取值范围为 $0 < \mu < 4$. 显然, μ 与 x 在其取值范围内由小变大时, 此映射呈现从简单到复杂的行为. 当 $\mu = 4.0$ 时, 其映射呈现混沌特性(图 1.4(c)).



(a) 倍周期分叉图



(b) 功率谱



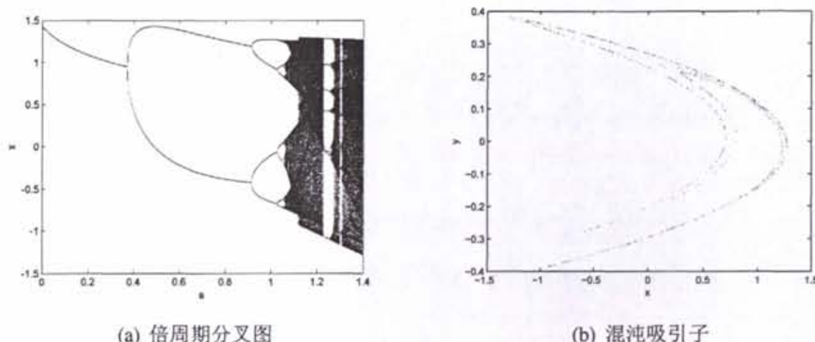
(c) 混沌特性

图 1.4: Logistic 映射的倍周期分叉图、功率谱和混沌特性.

二维非线性 Hénon 映射[23]

$$
\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2, \\ y_{n+1} = bx_n, \end{cases} \tag{1.2.2}
$$

其中 a 和 b 是控制参数. 当参数 $a \geq 1.4$ 时, Hénon 映射由倍周期分叉状态进入混沌状态(如图 1.5(a)). 当参数 $a = 1.4$ 和 $b = 0.3$ 时, Hénon 映射存在独特的混沌吸引子(图 1.5(b)).



(a) 倍周期分叉图　　(b) 混沌吸引子

图 1.5: Hénon 映射的倍周期分叉图和 $a = -1.4$ 和 $b = 0.3$ 时 Hénon 映射的奇异混沌吸引子.

空间 2-D Logistic 系统[24]

$$
x_{m+1,n} + ax_{m,n+1} = 1 - \lambda[(1+a)x_{m,n}]^2, \tag{1.2.3}
$$

其中 a 是一个实参数, λ 是一个大于零的实数. 当 $\lambda > 1.55$ 时, 2-D Logistic 映射 (1.2.3) 呈现混沌行为(图 1.6). 一维混沌系统和空间混沌系统已被应用于电子学、电力系统、电路设计、密码学、通信加密、化学反应、激光物理、流体混合、生物系统、心脏科学、脑科学、神经网络等领域中[22–29].

1.3 分形和混沌的关系

混沌和分形是非线性科学的两个分支, 它们之间的关系密不可分, 混沌中包含分形, 分形中包含混沌.

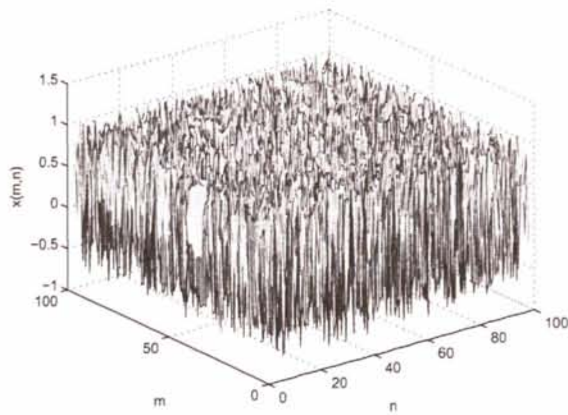


图 1.6: 2-D Logistic 映射的混沌行为.

混沌主要讨论非线性系统不具有周期性又不发散的过程, 往往是不规则的, 总是显现出分形的特性, 即自相似性. 如混沌系统的分叉图 1.7, 可见具有分形特征, 则混沌中包含分形.

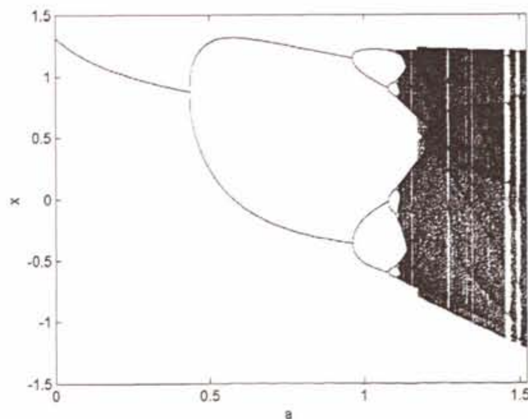


图 1.7: 分叉图.

系统产生分形结构的充分条件是吸引子, 无规则运动的混沌吸引子具有分形结构. 不严格地说, 一个吸引子就是一个集合. 例如 Julia 集(图 1.8) 上的点在经过迭代后仍然在 Julia 集上, 而它周围的点在经过迭代以后则会离它远去, 可以说 Julia 集上的点是混沌的, 所以, 分形中包含混沌.

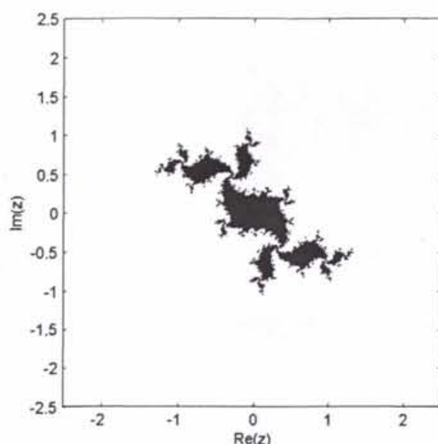


图 1.8: Julia 集.

1.4 一个新的问题——空间分形

1.1 中所涉及的分形, 在迭代过程中将一个复变量放到平面上的实坐标轴 x 和 y 上, 生成的分形图总是在 R^2 中的图形, 所以完全可以称之为–平面分形现象, 例如经典的 Julia 集, 它来之于一个经典的二次迭代多项式

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \tag{1.4.1}$$

其中 $n = 1, 2, \cdots$ 是迭代次数, z 是复变量. 当 $z_0 \neq 0$ 时, c 取不同值时, z_0 经二次多项式 (1.4.1) 迭代生成不同的 Julia 集(图 1.9).

注意到

$$z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = (1+a)^2 z_{m,n}^2 + c \tag{1.4.2}$$

和

$$z_{n+1}(i) = (1-\varepsilon)z_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1) + z_n^2(i+1)) + c, \tag{1.4.3}$$

其中 c 是复参数, a 是实常数且 $a \neq -1$. ε 是耦合强度, i 是格子坐标, $i = 1, 2, \cdots, L$, L 是系统的大小, 并且取周期边界条件为 $z_n(0) = z_n(L)$. 特别

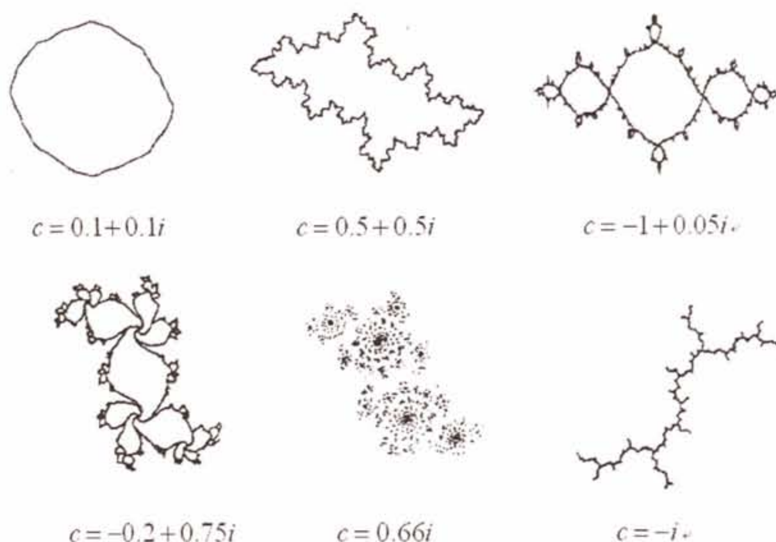


图 1.9: 不同 c 值的复迭代 $z_{n+1}=z_n^2+c$ 的 Julia 集.

地, 当 $a=0$, $n=n_0=0$, 离散复动力系统 (1.4.2) 转化为经典二次迭代多项式 (1.4.1), 所以离散复迭代动力系统 (1.4.2) 是复迭代系统 (1.4.1) 的推广, 或者说复迭代系统 (1.4.1) 是系统 (1.4.2) 的特殊情形. 对于离散复迭代动力系统 (1.4.3), 当 $\varepsilon=0$ 和 $L=1$ 时, 系统 (1.4.3) 就变换为复迭代系统 (1.4.1). 因此可以说, 离散复迭代动力系统 (1.4.3) 是复迭代系统 (1.4.1) 的推广, 或者说复迭代系统 (1.4.1) 是离散复迭代动力系统 (1.4.3) 的特殊情形.

然而, 对于复离散迭代动力系统的基本理论、控制和应用, 在已有的文献中均无涉及, 本论文给予了专门的讨论.

1. 离散复迭代动力系统 (1.4.2) 的空间混沌 Julia 集的生成和基本性质, 并讨论了它的控制.

2. 离散复迭代动力系统 (1.4.2) 的空间混沌 Julia 集的线性和非线性广义同步的定义, 同时也讨论了两个不同空间混沌 Julia 集的线性和非线性广义同步的实现.

3. 离散复迭代动力系统 (1.4.3) 的空间 Julia 集基本性质.

4. 利用不同的控制方法分别实现了离散复迭代动力系统 (1.4.3) 的空间

Julia 集的控制与同步.

1.5 关于混沌复动力系统的进一步研究

1.2 中所涉及的混沌系统, 是离散的, 且变量是属于实数域的, 而这里我们讨论连续的混沌系统, 例如经典的 Lorenz 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= a_1(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= a_3x_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - a_2x_3, \end{cases} \tag{1.5.1}$$

其中 a_1, a_2, a_3 是实参数. 当 $a_1 = 10$, $a_2 = \frac{8}{3}$ 和 $a_3 = 28$ 时, 连续混沌系统 (1.5.1) 有一个正的 Lyapunov 指数(图 1.10), 故存在混沌吸引子, 即系统 (1.5.1) 呈现混沌行为(图 1.11).

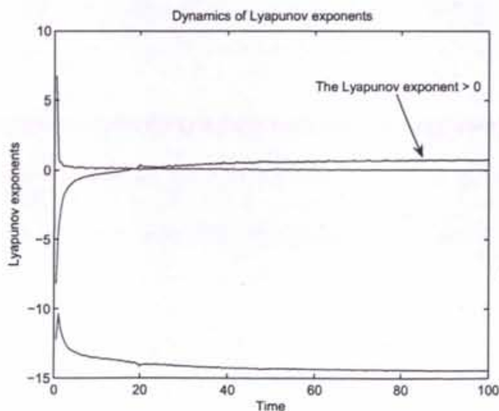


图 1.10: 初始值为 $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$ 和 $x_3(0) = 0$ 时, 系统 (1.5.1) 的 Lyapunov 指数动态.

如果连续混沌系统 (1.5.1) 中的变量 x_i ($i = 1, 2, 3$) 用复变量 z_i 替代, 并对乘积项做一定的处理, 则混沌系统 (1.5.1) 变为下面的混沌复动力系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= a_1(z_2 - z_1), \\ \dot{z}_2 &= a_3z_1 - z_2 - z_1z_3, \\ \dot{z}_3 &= \frac{1}{2}(\bar{z}_1z_2 + z_1\bar{z}_2) - a_2z_3. \end{cases} \tag{1.5.2}$$

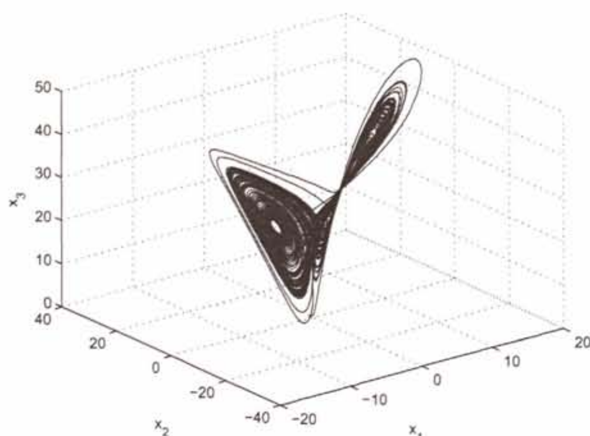


图 1.11: 同样初始条件下, 系统 (1.5.1) 的混沌吸引子.

当 $a_1 = 14$, $a_2 = 3.7$, $a_3 = 35$ 时混沌复动力系统 (1.5.2) 也存在混沌吸引子. 如果混沌复 Lorenz 系统中的复变量 z_i 都取为实数, 那么混沌复系统 (1.5.2) 就变为经典混沌系统 (1.5.1), 亦可以说混沌系统 (1.5.1) 是混沌复系统 (1.5.2) 的特殊情形, 而混沌复系统 (1.5.2) 是更一般的混沌系统. 而目前对于混沌复动力系统的研究还相当的少, 本论文对其进行了更进一步的研究.

1. 构造了一个新的复类 Lorenz 系统, 分析了它的基本动态特性, 利用主动控制和反馈控制两种不同的方法实现了它的反同步, 并比较了这两种方法.

2. 讨论了含有未知参数的不确定混沌复系统的自适应反同步.

3. 利用设计观测器的控制方法实现了不确定混沌复系统的投影同步.

4. 讨论了含有外部扰动和未知参数的不确定混沌复系统的鲁棒自适应混合投影同步.

1.6 论文的章节分布

针对以上分析, 本论文主要利用反馈控制、最优函数控制和梯度控制等方法, 并借助于线性系统解的稳定性理论, 研究了复迭代系统 (1.4.2) 和 (1.4.3) 的空间 Julia 集的控制和同步问题. 利用主动控制、反馈控制、自适应等技术和 Lyapunov 稳定理论以及 Barbalat 引理等, 系统地研究了混沌复系统的多类同步问题, 获得了一系列研究结果, 具体安排如下:

第一章、整体上介绍了本论文的研究意义和主要的研究内容.

第二章、耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制和同步.

第三章、空间混沌 Julia 集的控制和广义同步.

第四章、一个新的复类 Lorenz 系统的反同步.

第五章、含有未知参数的混沌复系统的自适应反同步.

第六章、基于观测器的混沌复系统的投影同步.

第七章、含有扰动的混沌复系统的鲁棒自适应全状态混合投影同步.

第八章、总结了本论文所获得的研究结果, 提出了有待解决的问题.

本论文的部分研究成果, 已被如下杂志发表或者接收:

Nonlinear Analysis: Real World Applications

Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation

International Journal of Bifurcation and Chaos

Physica Scripta

Indian Journal of Physics

International Journal of Nonlinear Science.

第二章 耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制与同步

2.1 引言

分形理论在数学、物理学、材料学、地质勘探、疾病诊断、股票预测、计算机和信息科学等领域已有广泛的理论和应用成果[30–37]. 例如分形中的扩散限制聚集模型[38, 39], 可以模拟癌细胞的扩散生长, 其结果表明, 肿瘤和癌变类似于复杂系统中的自相似结构, 实际上是由递推公式不断重复计算的结果[40]. 人们期望通过大量的模拟计算和深入分析找到癌变机制, 特别是通过某种调节控制机制, 使癌变细胞不再扩散并得到有效抑制, 这一机理所反应出的问题, 即是复杂系统的控制问题.

关于耦合映像格子模型的空间分形是离散的复动力系统, 涉及到涵盖空间分形的定性性质、理论和应用[14, 41, 42]. 耦合映像格子模型最初由金子邦彦提出[43], 是典型的时空混沌模型, 关于它的研究已经相当的深入[44–46]. 本部分将给出由这个模型生成的空间 Julia 集及其概念和基本理论. 随后, 利用多种控制方法实现耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制. 同时, 利用不同的控制方法实现两个不同耦合映像格子模型的空间 Julia 集的同步.

2.2 耦合映像格子模型的空间 Julia 集

考虑耦合映像格子模型

$$x_{n+1}(i) = (1-\varepsilon)f(x_n(i)) + \frac{\varepsilon}{2}[f(x_n(i-1)) + f(x_n(i+1))], \qquad (2.2.1)$$

其中 n 表示时间指标, x 为系统状态, ε 是耦合强度, 为 $[0,1)$ 之间的正实数; i 为格点坐标($i = 1, 2, 3, \cdots, L$), L 为系统的大小, 周期边界条件由 $x_n(0) = x_n(L)$ 实现. 近些年来的很多研究工作集中于模型 (2.2.1), 并且 $f(x) = 1 - \varepsilon x^2$.

复平面偏微分方程有着广泛的应用和更为实际的物理意义, 故将耦合映像

格子模型 (2.2.1) 扩展到复动力系统

$$z_{n+1}(i) = (1-\varepsilon)f(z_n(i)) + \frac{\varepsilon}{2}[f(z_n(i-1)) + f(z_n(i+1))], \qquad (2.2.2)$$

同样地, n 表示时间指标, z 为系统状态, ε 是耦合强度, 为 $[0,1)$ 之间的正实数; i 为格子指标 ($i = 1, 2, 3, \cdots, L$), L 为系统大小, 并取周期边界条件 $z_n(0) = z_n(L)$. 取 $f(z)$ 为 Logistic 映射的等价映射 $f(z) = z^2 + c$, 其中 c 是复参数, 它的性质与取值范围与经典 Julia 集理论中的 c 相同.

经典的 Julia 集反映的是 z 复平面上的点经过多次迭代后的情况, 形成的图形是二维的. 而耦合映像格子模型 (2.2.2) 具有 L 个状态变量, 故有 L 个初始状态. 迭代形成高维 Julia 集的过程中, 将每一个状态变量均放到两个坐标轴上进行研究. 因此, 耦合映像格子模型的空间 Julia 集是一个 2^L 维的图形.

取 $f(z) = z^2 + c$, 则耦合映像格子模型 (2.2.2) 为

$$z_{n+1}(i) = (1-\varepsilon)z_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1) + z_n^2(i+1)) + c. \qquad (2.2.3)$$

事实上, 由耦合映像格子模型 (2.2.3) 迭代形成的图形就是耦合映像格子模型的空间 Julia 集. 下面给出耦合映像格子模型的空间 Julia 集的定义

定义 2.1. 对于耦合映像格子模型 (2.2.3), 如果一个状态向量 $(z_n(1), z_n(2), \cdots, z_n(L))^T$ 在迭代过程中呈现出周期性特征, 并且与它差别微小的状态向量经过迭代后均离它远去, 即表现出斥性特征, 则状态向量 $(z_n(1), z_n(2), \cdots, z_n(L))^T$ 称为周期状态向量.

定义 2.2. 耦合映像格子模型的空间 Julia 集定义为其斥性周期状态向量的闭包. 其余集为稳定的空间 Fatou 集.

事实上, 耦合映像格子模型的空间 Fatou 集就是耦合映像格子模型的包括无穷大在内的稳定不动平面的稳定空间.

为了实现耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制, 根据参考文献[24, 58]引入下面的结论.

引理 2.1. 耦合映像格子模型 (2.2.2) 中, 周期状态向量 $(z_n(1), z_n(2), \cdots, z_n(L))^T$ 为斥性周期状态向量的充分必要条件是对于所有 $i = 1, 2, 3, \cdots, L$ 满足 $|f'(z_n(i))| > 1$.

引理 2.2. 如果 w 是函数 $g(\cdot)$ 的吸引不动点, 则它的吸引域为 $A(w) = \{z \in C : g^s(z) \to w, (s \to \infty)\}$, 其中$g(\cdot)$ 是一元函数并且 s 是迭代次数.

引理 2.3. 如果 w 是吸引不动点, 那么 $\partial A(w) = J(g)$, 其中 ∂A 表示吸引域的边界 A, 并且 J 表示某个 *Julia*集.

由上面的定义和引理, 得

推论 2.1. 如果 ϱ 是稳定不动平面, 则稳定的空间为 $S(\varrho) = \{z(i) \in C : F^{(t)}(z(i)) \to \varrho, (t \to \infty)\}$, 且 $F(\cdot)$ 是关于复变量 $z(i)$ 的函数, 其中 t 是迭代次数.

推论 2.2. 如果 ϱ 是稳定的不动平面, 则 $\partial S(\varrho) = J_s(F)$, 且$\partial S$ 表示稳定空间 S 的边界, 并且 J_s 表示某个空间 *Julia* 集.

在以上的定义、引理和推论中, 充分的了解了耦合映像格子模型的空间 Julia 集的基本性质, 并且可以看出这些性质与经典 Julia 集的性质完全吻合, 可以说经典 Julia 集是耦合映像格子模型的空间 Julia 集当 $\varepsilon = 0$ 时的一个特例.

2.3 耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制

基于上面的分析, 对于耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制问题转换为耦合映像格子模型 (2.2.3) 的不动平面的稳定问题. 换句话说, 找到控制器 u_n 使控制系统 (2.3.1) 的不动平面 z^* 变为稳定的不动平面.

$$z_{n+1}(i) = (1-\varepsilon)z_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1) + z_n^2(i+1)) + c + u_n. \tag{2.3.1}$$

进一步说, 当 $n \to \infty$ 时, $z_n(i) \to z^*(i)$. 因此, 可以通过控制耦合映像格子模型的空间 Julia 集的轨迹来实现其控制.

下面分别利用梯度控制[18], 最优函数控制[47]和辅助参考控制方法[36]实现耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制.

2.3.1 耦合映像格子模型的空间 Julia 集的梯度控制

讨论利用梯度控制方法实现耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制, 选取控制项为 $u_n = -\frac{k}{1+k}(z_{n+1}(i) - z^*(i))$, 则有

$$z_{n+1}(i) = \frac{1}{1+k}[(1-\varepsilon)z_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1) + z_n^2(i+1)) + c] + \frac{k}{1+k}z^*(i), \quad i = 1, 2\cdots, L. \tag{2.3.2}$$

显然地, 不动平面 $z^*(i)$ 仍为系统 (2.3.2) 的不动平面.

根据推论 2.2, 可以通过控制系统 (2.3.2) 的不动平面的稳定性来控制耦合映像格子模型的空间 Julia 集的轨迹, 从而实现耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制. 因此, 需要考虑系统 (2.3.2) 的不动平面的稳定性问题.

函数 $F(z(i))$ 表示为

$$F(z(i)) = \frac{1}{1+k}[(1-\varepsilon)z^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(z^2(i-1) + z^2(i+1)) + c] + \frac{k}{1+k}z^*(i), \quad i = 1, 2\cdots, L, \tag{2.3.3}$$

则函数 $F(z(i))$ 的雅克比矩阵 J_F 为

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{2(1-\varepsilon)}{1+k}z(1) & \frac{\varepsilon}{1+k}z(2) & \cdots & \frac{\varepsilon}{1+k}z(L) \\ \frac{\varepsilon}{1+k}z(1) & \frac{2(1-\varepsilon)}{1+k}z(2) & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{1+k}z(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\varepsilon}{1+k}z(L) \\ \frac{\varepsilon}{1+k}z(1) & 0 & \cdots & \frac{2(1-\varepsilon)}{1+k}z(L) \end{pmatrix}, \tag{2.3.4}$$

其中 J_F 是一个 $L \times L$ 的矩阵. 根据周期边界条件 $z_n(0) = z_n(L)$ 和函数 $F(z(i))$ 的雅克比矩阵 J_F, 我们知道雅克比矩阵 J_F 的齐次解是一个循环矩阵[48]. 因此, 通过取一个傅里叶矩阵 $G_{L\times L}$, 雅克比矩阵 J_F 能被对角化, 于是雅克比矩

阵 J_F 的对角矩阵 $\hat{J}_F$ 为

$$\hat{J}_F = G^{-1} J_F G,$$

并且对角矩阵 $\hat{J}_F$ 的元素为

$$\hat{J}_F(l,l) = \frac{2}{1+k}(1-\varepsilon)z(l) + \frac{2}{1+k}\varepsilon z(l)\cos(\theta_l), \tag{2.3.5}$$

其中 $\theta_l = \frac{2\pi l}{L}$, $l = 1, 2, \cdots L$. 注意到, 系统 (2.3.2) 的不动平面的稳定条件是雅克比矩阵 J_F 在不动平面时的特征值在单位球内. 根据式 (2.3.5), 雅克比矩阵在不动平面处特征值的模是有界的, 并且满足 $|\frac{2}{1+k}(1-2\varepsilon)z^*| < |\lambda(J_{F(z^*)})| < |\frac{2}{1+k}z^*|$. 因此, 系统 (2.3.2) 的不动平面 z^* 应该满足 $|\frac{2}{1+k}(1-2\varepsilon)z^*| < 1$ 和 $|\frac{2}{1+k}z^*| < 1$.

为了计算方便, 取不动平面为 $z^* = z^*(i) = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$, 则有

$$\begin{aligned} & |\frac{2}{1+k}(1-2\varepsilon)\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}| \\ = & |\frac{1}{1+k}(1-2\varepsilon)(1-\sqrt{1-4c})| \\ < & \ 1 \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

和

$$\begin{aligned} & |\frac{2}{1+k}\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}| \\ = & |\frac{1}{1+k}(1-\sqrt{1-4c})| \\ < & \ 1. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

由 (2.3.6) 和 (2.3.7), 得

$$|1+k| > |(1-\sqrt{1-4c})(1-2\varepsilon)|$$

和

$$|1+k| > |1-\sqrt{1-4c}|,$$

则控制参数 k 的取值范围为

$$|1+k| > \max\{|(1-\sqrt{1-4c})(1-2\varepsilon)|, |1-\sqrt{1-4c}|\}. \tag{2.3.8}$$

故可以通过选择控制参数 k 来实现耦合映像格子模型的空间 Julia 集的轨迹的控制, 从而实现耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制.

基于上面的讨论, 我们知道耦合映像格子模型的空间 Julia 集可以通过 2^L 维的图形来模拟, 但是它增加了模拟耦合映像格子模型的空间 Julia 集的复杂性, 并且也缺少直观性. 为了避免这些麻烦, 取系统 (2.3.2) 的格子长度为 2 作为例子, 说明梯度控制方法对耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制.

当 $L=2$ 时, 系统 (2.3.2) 变为

$$\begin{cases} z_{n+1}(1) = \frac{1}{1+k}[(1-\varepsilon)z_n^2(1) + \varepsilon z_n^2(2) + c] + \frac{k}{1+k}z^*(1), \\ z_{n+1}(2) = \frac{1}{1+k}[(1-\varepsilon)z_n^2(2) + \varepsilon z_n^2(1) + c] + \frac{k}{1+k}z^*(2). \end{cases} \tag{2.3.9}$$

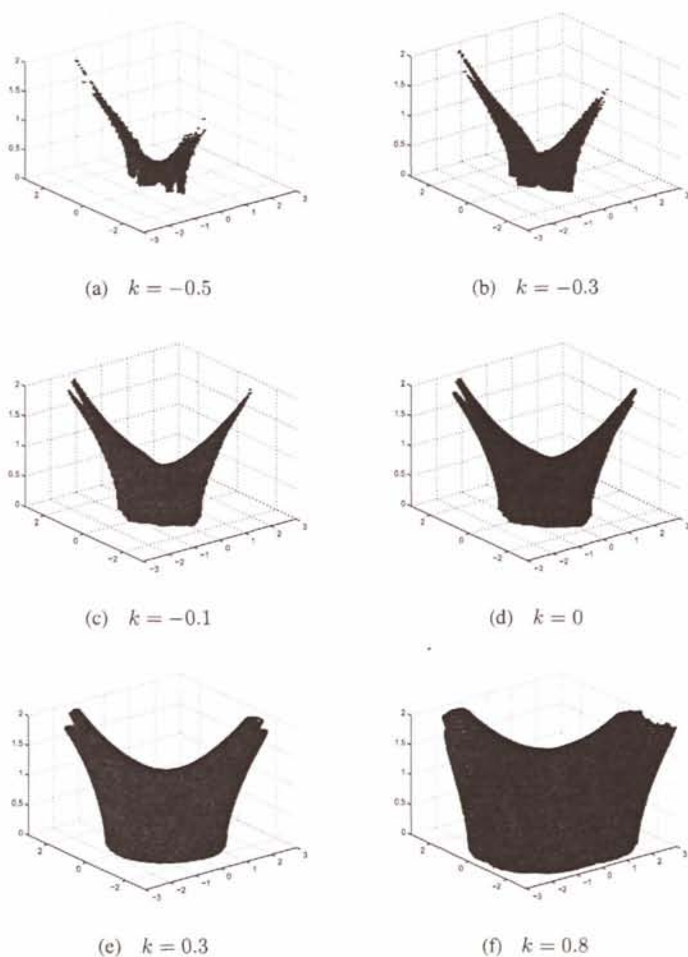
显然地, 耦合映像格子模型 (2.3.9) 的变量 $z(1) = x(1) + jy(1)$ 和 $z(2) = x(2) + jy(2)$ 是复变量, 并且 $x(1)$, $y(1)$, $x(2)$, $y(2)$ 是四个实变量, 所以耦合映像格子模型 (2.3.9) 的空间 Julia 集的仿真图是四维的. 四维的仿真图也是不易实现的, 于是需要取一个切面或者固定四个实坐标中的一个, 通过三维的仿真图来模拟耦合映像格子模型的空间 Julia 集. 可取切面 $x(2) = y(2) = t$, 则其空间 Julia 集可以由耦合映像格子模型 (2.3.9) 的全部有界点 $(x(1), y(1), t)$ 组成. 因此, 耦合映像格子模型的空间 Julia 集可在空间 $\mathbf{R}^3$ 中生成. 当 $\varepsilon = 0.4$ 和 $c = -0.2 + 0.1i$ 时, 耦合映像格子模型 (2.3.9) 的空间 Julia 集如图 2.1(d) 所示.

当 $L=2$ 时, 函数 (2.3.3) 变为

$$F(z(i)) = \frac{1}{1+k}[(1-\varepsilon)z^2(i) + \varepsilon(z^2(i+1) + c] + \frac{k}{1+k}z^*(i), i = 1, 2 \tag{2.3.10}$$

根据周期边界条件 $z(1) = z(3)$, 得

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{2(1-\varepsilon)}{1+k}z(1) & \frac{2\varepsilon}{1+k}z(2) \\ \frac{2\varepsilon}{1+k}z(1) & \frac{2(1-\varepsilon)}{1+k}z(2) \end{pmatrix}. \tag{2.3.11}$$



(a) $k=-0.5$　(b) $k=-0.3$

(c) $k=-0.1$　(d) $k=0$

(e) $k=0.3$　(f) $k=0.8$

图 2.1: 当 $\varepsilon=0.4$ 和 $c=-0.2+0.1i$ 时, 耦合映像格子模型 (2.3.1) 的空间 Julia 集受参数 k 的控制图.

于是, 雅克比矩阵 J_F 的对角矩阵 $\hat{J}_F$ 为

$$\hat{J}_F=\begin{pmatrix} \frac{2(1-2\varepsilon)}{1+k}z(1) & 0 \\ 0 & \frac{2}{1+k}z(2) \end{pmatrix}, \tag{2.3.12}$$

则雅克比矩阵 J_F 的特征值为 $\lambda_1=\frac{2(1-2\varepsilon)}{1+k}z(1)$ 和 $\lambda_2=\frac{2}{1+k}z(2)$. 根据不动平面的稳定条件, 有 $|\lambda_1|=|\frac{2(1-2\varepsilon)}{1+k}z^*(1)|<1$ 和 $|\lambda_2|=|\frac{2}{1+k}z^*(2)|<1$. 因此, 可以得到使系统 (2.3.9) 的不动平面 $z^*(i)=\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}(i=1,2)$ 稳定的控制参数 k 的范围.

当 $\varepsilon=0.4$ 和 $c=-0.2+0.1i$ 时, 则控制参数 k 的范围是 $k\in\{k<-1.38\}\cup\{k>-0.62\}$. 控制参数 k 对耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制如图 2.1(a-f)所示, 可见控制参数 k 可以控制耦合映像格子模型的空间 Julia 集的分叉和连通性, 随着控制参数 k 的增加, 耦合映像格子模型的空间 Julia 集的分叉越来越明显并且分叉数量越来越少. 因此, 我们可以选择合适的控制参数 k 来控制耦合映像格子模型的空间 Julia 集, 以满足工程技术的实际需求和工业生产中对于分形图像的要求.

2.3.2 耦合映像格子模型的空间 Julia 集的辅助参考控制

利用辅助参考控制方法讨论系统 (2.2.3) 的不动平面的稳定问题, 以便于实现耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制.

引入辅助参考控制项 $g_n(i)(z_n(i)-z_{ref})$, 于是系统 (2.3.1) 变为

$$\begin{aligned} z_{n+1}(i) &= (1-\varepsilon)z_n^2(i)+\frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1)+z_n^2(i+1))+c \\ &\quad + g_n(i)(z_n(i)-z_{ref}), \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

其中 z_{ref} 是辅助参考项, $g_n(i)$ 是反馈项. 令

$$g_n(i)=kz_{ref}+\sum_{j=0}^{\nu}a_jz_{n-j}(i),$$

其中 ν 是一个非负整数, 与系统 (2.3.13) 有关; 而控制参数 k 和参数 a_j 依赖于系统 (2.3.13) 的稳定性. 取 $\nu=0$, 有

$$g_n=kz_{ref}+a_0z_n(i). \tag{2.3.14}$$

将反馈项 (2.3.14) 代入控制系统 (2.3.13), 并取 $a_0=k$, 则有

$$z_{n+1}(i)=(1-\varepsilon)z_n^2(i)+\frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1)+z_n^2(i+1))+c+k(z_n^2(i)-z_{ref}^2) \tag{2.3.15}$$

由推论 2.1 和推论 2.2 知, 若使不动平面 $z^*(i)=\frac{1\pm\sqrt{1-4c}}{2}$ 是稳定的, 则需同时满

足方程

$$z^*(i)-(1-\varepsilon)(z^*(i))^2-\frac{\varepsilon}{2}[(z^*(i-1))^2+(z^*(i+1))^2]-c=0, \tag{2.3.16}$$

和

$$z^*(i)-(1-\varepsilon)(z^*(i))^2-\frac{\varepsilon}{2}[(z^*(i-1))^2+(z^*(i+1))^2]-c\,k(z^*(i))^2-z_{ref}^2)=0. \tag{2.3.17}$$

由方程 (2.3.16) 和 (2.3.17), 得 $z_{ref}=z^*$. 于是有

$$z_{n+1}(i)=(1-\varepsilon)z_n^2(i)+\frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1)+z_n^2(i+1))+k(z_n^2(i)-(z^*)^2)+c. \tag{2.3.18}$$

同样地, 表示

$$F(z(i))=(1-\varepsilon+k)z^2(i)+\frac{\varepsilon}{2}(z^2(i-1)+z^2(i+1))+c-k(z^*)^2, \quad i=1,2\cdots,L, \tag{2.3.19}$$

则函数 $F(z(i))$ 的雅克比矩阵 J_F 是

$$J_F=\begin{pmatrix} 2(1-\varepsilon+k)z(1) & \varepsilon z(2) & \cdots & \varepsilon z(L) \\ \varepsilon z(1) & 2(1-\varepsilon+k)z(2) & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon z(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon z(L) \\ \varepsilon z(1) & 0 & \cdots & 2(1-\varepsilon+k)z(L) \end{pmatrix}, \tag{2.3.20}$$

其中 J_F 是一个 $L\times L$ 的矩阵. 根据周期边界条件 $z_n(0)=z_n(L)$ 和雅克比矩阵 (2.3.20) 知, 雅克比矩阵 J_F 的齐次解是循环矩阵[48]. 因此, 通过取一个傅里叶

矩阵 $G_{L\times L}$, 雅克比矩阵 J_F 能被对角化, 于是雅克比矩阵 J_F 的对角矩阵 $\hat{J}_F$ 为

$$\hat{J}_F = G^{-1} J_F G.$$

另外, 对角矩阵 $\hat{J}_F$ 的元素为

$$\hat{J}_F(l,l) = 2(1-\varepsilon+k)z(l) + 2\varepsilon z(l)\cos(\theta_l), \tag{2.3.21}$$

其中 $\theta_l = \frac{2\pi l}{L}$, $l = 1, 2, \cdots L$. 系统 (2.3.18) 的不动平面的稳定条件是雅克比矩阵 J_F 在不动平面处的特征值在单位球内. 根据式 (2.3.21), 雅克比矩阵在不动平面处特征值的模是有界的, 并且处于 $|2(1+k)z^*|$ 和 $|2(1-2\varepsilon+k)z^*|$ 之间. 因此, 根据不动平面的稳定条件, 获得 $|2(1+k)z^*| < 1$ 和 $|2(1-2\varepsilon+k)z^*| < 1$. 显然, 给定耦合强度 ε 和不动平面, 就可以求出控制参数 k 的范围.

取不动平面 $z^* = z^*(i) = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$, 则有

$$\begin{aligned} & |2(1+k)\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}| \\ = & |(1+k)(1-\sqrt{1-4c})| \\ < & 1 \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

和

$$\begin{aligned} |2(1-2\varepsilon+k)\frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}| &= |(1-2\varepsilon+k)(1-\sqrt{1-4c})| \\ &< 1. \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

根据不等式 (2.3.22) 和 (2.3.23), 有

$$|1+k| < \frac{1}{|1+\sqrt{1-4c}|}$$

和

$$|1+k-2\varepsilon| < \frac{1}{|1+\sqrt{1-4c}|},$$

于是控制参数 k 的范围为

$$\begin{aligned}&\max\{-\frac{1}{|1+\sqrt{1-4c}|}-1,-|1+\sqrt{1-4c}|+2\varepsilon-1\}<k\\<\ &\min\{\frac{1}{|1+\sqrt{1-4c}|}-1,|1+\sqrt{1-4c}|+2\varepsilon-1\}.\end{aligned}$$

所以, 可通过选择合适的控制参数 k 来控制耦合映像格子模型空间 Julia集的迭代向量的轨迹, 以实现对此空间 Julia 集的控制.

同样地, 取系统 (2.2.3) 的格子长度 2 为例说明利用辅助参考控制的方法对耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制. 当 $L=2$ 时, 系统 (2.3.18) 变换为

$$\begin{cases} z_{n+1}(1)=(1+k-\varepsilon)z_n^2(1)+\varepsilon z_n^2(2)+c-k(z^*)^2(1),\\ z_{n+1}(2)=(1+k-\varepsilon)z_n^2(2)+\varepsilon z_n^2(1)+c-k(z^*)^2(2).\end{cases}\tag{2.3.24}$$

同时, 有

$$F(z(i))=(1+k-\varepsilon)z_n^2(i)+\varepsilon z_n^2(i+1)+c-k(z^*)^2(i), i=1,\ 2.\tag{2.3.25}$$

根据周期边界条件 $z(1)=z(3)$, 雅克比矩阵 (2.3.20) 变为

$$J_F=\begin{pmatrix} 2(1-\varepsilon+k)z(1) & 2\varepsilon z(2)\\ 2\varepsilon z(1) & 2(1-\varepsilon+k)z(2)\end{pmatrix},\tag{2.3.26}$$

并且它的对角矩阵 $\hat{J}_F$ 变为

$$\hat{J}_F=\begin{pmatrix} 2(1-2\varepsilon+k)z(1) & 0\\ 0 & 2(1+k)z(2)\end{pmatrix}.\tag{2.3.27}$$

根据对角矩阵 (2.3.27), 则雅克比矩阵 (2.3.26) 的特征值为 $\lambda_1=2(1-2\varepsilon+k)z(1)$ 和 $\lambda_2=2(1+k)z(2)$. 根据不动平面的稳定条件, 得到 $|\lambda_1|=|2(1-2\varepsilon+k)z^*(1)|<1$ 和 $|\lambda_2|=|2(1+k)z^*(2)|<1$. 因此, 可得到使系统 (2.3.24) 的不动平面 $z^*(i)=\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$, $i=1,\ 2$ 稳定的控制参数 k 的范围. 例如, 取 $\varepsilon=0.4$ 和 $c=0.2-0.1i$ 时, 则控制参数 k 的范围是 $k\in\{-1.9975<k<1.5975\}$. 当

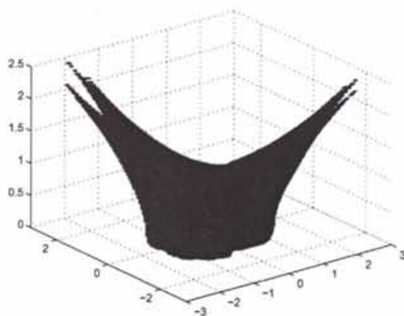


图 2.2: 当 $c = 0.2 - 0.1i$ 和 $\varepsilon = 0.2$ 时, 系统 (2.2.3) 不带控制项时的耦合映像格子模型的空间 Julia 集.

$\varepsilon = 0.4$ 和 $c = 0.2 - 0.1i$ 时, 系统 (2.3.3) 的耦合映像格子模型的空间 Julia 集如图 2.2 所示. 当 $k \in \{-1.9975 < k < 1.5975\}$ 时, 随着控制参数 k 变化的耦合映像格子模型的空间 Julia 集的变化如图 2.3(a-f) 所示, 可见控制参数 k 能控制耦合映像格子模型的空间 Julia 集的结构形状和分叉, 因此可以选择合适的控制参数 k 来控制耦合映像格子模型的空间 Julia 集.

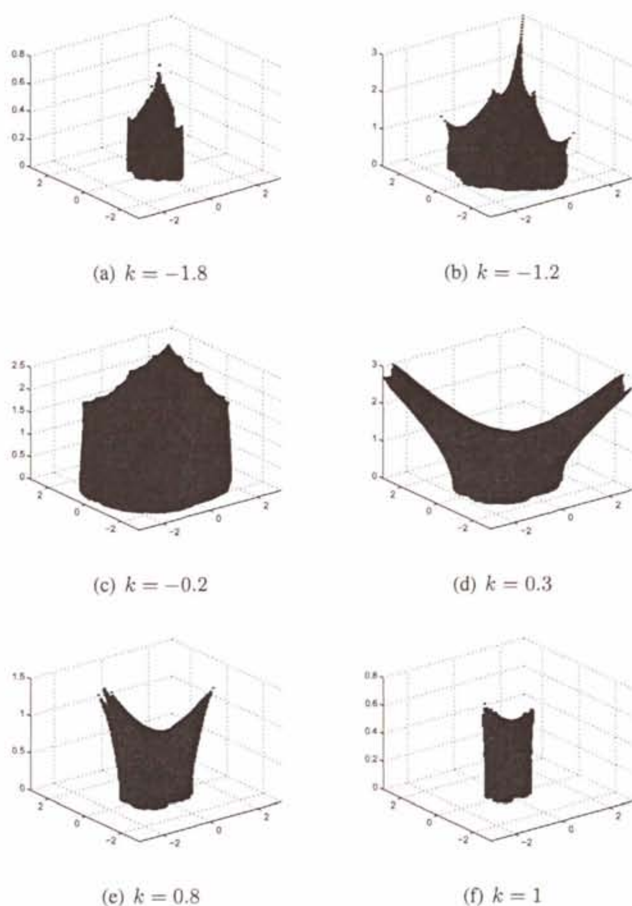
2.3.3 耦合映像格子模型的空间 Julia 集的最优函数控制

上面讨论了利用梯度控制方法和辅助参考控制的方法来实现耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制, 但是这两种方法要求系统的不动平面是已知的, 而在实际情况下系统的不动平面不易求出. 在这种情况下, 可以利用最优函数控制的方法来实现耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制. 对于此控制方法, 不需要已知系统 (2.2.3) 的不动平面, 具有更广的适用性. 因此, 取控制项 $u_n = -k[z_{n+1}(i) - z_n(i)]$[47], 则系统 (2.3.1) 变换为

$$z_{n+1}(i) = (1-k)[(1-\varepsilon)z_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1) + z_n^2(i+1)) + c] + kz_n(i),$$
$$i = 1, 2\cdots, L. \quad (2.3.28)$$

同样地表示

$$F(z(i)) = (1-k)[(1-\varepsilon)z^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(z^2(i-1) + z^2(i+1)) + c] + kz(i),$$
$$i = 1, 2\cdots, L, \quad (2.3.29)$$



(a) $k=-1.8$ (b) $k=-1.2$

(c) $k=-0.2$ (d) $k=0.3$

(e) $k=0.8$ (f) $k=1$

图 2.3: 当 $c=0.2-0.1i$ 和 $\varepsilon=0.4$ 时, 系统 (2.3.24) 的耦合映像格子模型的空间 Julia 集随控制参数 k 的变化图.

则函数 $F(z(i))$ 的雅克比矩阵 J_F 为

$$J_F=\begin{pmatrix} 2(1-k)(1-\varepsilon)z(1)+k & (1-k)\varepsilon z(2) & \cdots & (1-k)\varepsilon z(L) \\ (1-k)\varepsilon z(1) & 2(1-k)(1-\varepsilon)z(2)+k & \cdots & 0 \\ 0 & (1-k)\varepsilon z(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & (1-k)\varepsilon z(L) \\ (1-k)\varepsilon z(1) & 0 & \cdots & 2(1-k)(1-\varepsilon)z(L)+k \end{pmatrix}$$

其中 J_F 是一个 $L\times L$ 的矩阵. 相似地矩阵 J_F 的对角矩阵 $\hat{J}_F$ 是

$$\hat{J}_F=G^{-1}J_FG,$$

并且对角矩阵 $\hat{J}_F$ 元素为

$$\hat{J}_F(l,l) = 2(1-k)(1-\varepsilon)z(l) + k + 2(1-k)\varepsilon z(l)\cos(\theta_l), \qquad (2.3.30)$$

其中 $\theta_l = \frac{2\pi l}{L}, l = 1, 2, \cdots L$. 于是系统 (2.3.28) 的不动平面的稳定条件是在不动平面处的矩阵 J_F 的特征值在单位球内. 根据对角矩阵 (2.3.30), 雅克比矩阵在不动平面处特征值的模是有界的, 并且处于 $|2(1-k)(1-2\varepsilon)z^* + k|$ 和 $|2(1-k)z^* + k|$ 之间. 因此, 可知控制参数 k 满足 $|2(1-k)(1-2\varepsilon)z^* + k| < 1$ 和 $|2(1-k)z^* + k| < 1$.

同样地, 为了简化计算, 取不动平面 $z^* = z^*(i) = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$, 则控制参数 k 的范围是

$$|k| < \min\{\frac{1 - |(1-2\varepsilon)(1-\sqrt{1-4c})|}{|1-(1-2\varepsilon)(1-\sqrt{1-4c})|}, \frac{1 - |1-\sqrt{1-4c}|}{|\sqrt{1-4c}|}\}.$$

因此, 可以通过选择合适的 k 来控制耦合映像格子模型的空间 Julia集轨迹的控制, 以实现耦合映像格子模型的空间 Julia集的控制.

相似地, 取耦合映像格子模型的格子长度为 2 作为例子来说明最优函数控制方法对空间 Julia 集的控制. 当 $L = 2$ 时, 系统 (2.3.28) 变为

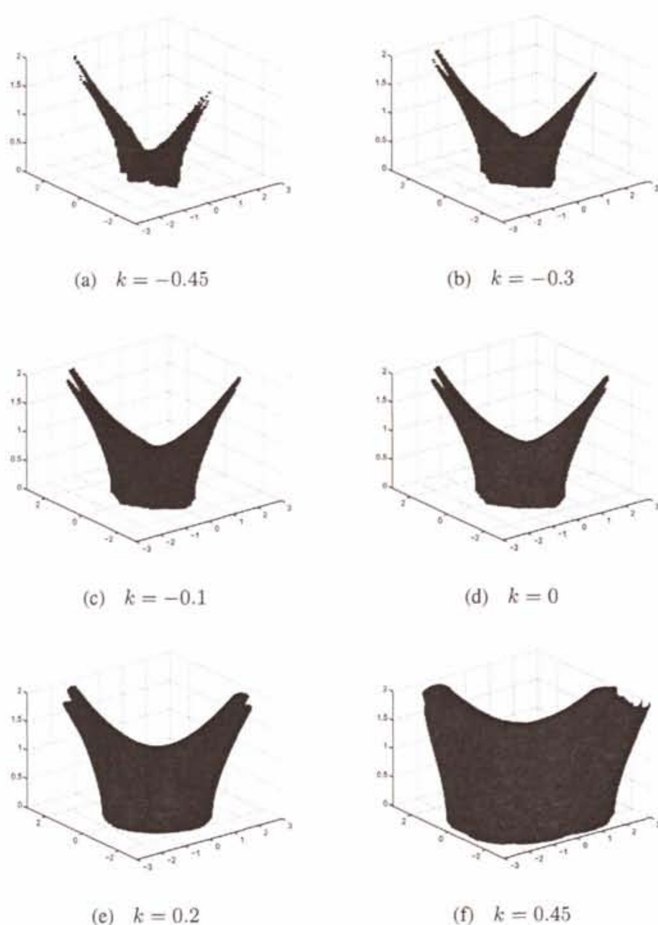
$$\begin{cases} z_{n+1}(1) = (1-k)[(1-\varepsilon)z_n^2(1) + \varepsilon z_n^2(2) + c] + kz_n(1), \\ z_{n+1}(2) = (1-k)[(1-\varepsilon)z_n^2(2) + \varepsilon z_n^2(1) + c] + kz_n(2). \end{cases} \qquad (2.3.31)$$

同时, 函数 (2.3.29) 变为

$$F(z(i)) = (1-k)[(1-\varepsilon)z^2(i) + \varepsilon(z^2(i+1) + c] + kz(i), i = 1, 2.$$

根据周期边界条件 $z(1) = z(3)$, 有

$$J_F = \begin{pmatrix} 2(1-k)(1-\varepsilon)z(1) + k & 2(1-k)\varepsilon z(2) \\ 2(1-k)\varepsilon z(1) & 2(1-k)(1-\varepsilon)z(2) + k \end{pmatrix}. \qquad (2.3.32)$$



(a) $k=-0.45$ (b) $k=-0.3$

(c) $k=-0.1$ (d) $k=0$

(e) $k=0.2$ (f) $k=0.45$

图 2.4: 当 $\varepsilon=0.4$ 和 $c=-0.2+0.1i$ 时, 系统 (2.3.31) 的空间 Julia 集随控制参数 k 变化的受控图.

则雅克比矩阵 J_F 的对角矩阵 $\hat{J}_F$ 为

$$\hat{J}_F=\begin{pmatrix} 2(1-k)(1-2\varepsilon)z(1)+k & 0 \\ 0 & 2(1-k)z(2)+k \end{pmatrix}. \tag{2.3.33}$$

于是雅克比矩阵 J_F 的特征值为 $\lambda_1=2(1-k)(1-2\varepsilon)z(1)+k$ 和 $\lambda_2=2(1-k)z(2)+k$. 因此, 根据不动平面的稳定条件可得到控制参数 k 满足 $|\lambda_1|=|2(1-k)(1-2\varepsilon)z^*(1)+k|<1$ 和 $|\lambda_2|=|2(1-k)z^*(2)+k|<1$. 当 $\varepsilon=0.4$ 和 $c=-0.2+0.1i$, 可得到控制参数 k 满足 $k\in\{-0.4567<k<0.4567\}$. 控制参数 k 对系统 (2.3.31) 的控制如图 2.4 所示, 控制参数 k 能有效地控制耦

合映像格子模型的空间 Julia 集的分叉, 并且分叉数随着控制参数 k 的增加而减少, 故可通过选择合适的 k 来实现对耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制.

2.4 耦合映像格子模型的空间 Julia 集的同步

混沌系统的同步是热门课题之一, 已取得了很多研究成果[49–52]. 本部分讨论复数域上系统间的空间 Julia 集的同步. 根据空间 Julia 集的定义, 给定一组系统参数, 相应的空间 Julia 集就被确定, 于是使得空间 Julia 集的同步定义与混沌同步有所不同.

考虑不同的复耦合映像格子模型

$$z_{n+1}(i) = (1-\varepsilon)z_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1) + z_n^2(i+1)) + c_1, \tag{2.4.1}$$

$$w_{n+1}(i) = (1-\varepsilon)w_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(w_n^2(i-1) + w_n^2(i+1)) + c_2, \tag{2.4.2}$$

其中 c_1 和 c_2 是复参数且 $c_1 \neq c_2$; ε 是耦合强度并且 $\varepsilon \in [0,\, 1)$.

如果给定复参数 $c_l(l=1,\,2)$, 耦合映像格子模型的空间 Julia 集也就确定. 于是, 当 $c_1 \neq c_2$ 时, 由耦合映像格子模型 (2.4.1) 与 (2.4.2) 产生的空间 Julia 集没有任何关系. 为了实现它们的同步, 需要分别加耦合项 $p[z_n(i), w_n(i), c_2, \varepsilon; k]$ 和 $q[z_n(i), w_n(i), c_1, \varepsilon; k]$ 到模型 (2.4.1) 和 (2.4.2), 于是有

$$\begin{aligned} z_{n+1}(i) &= (1-\varepsilon)z_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1) + z_n^2(i+1)) + c_1 \\ &\quad + p(z_n(i), w_n(i), c_2, \varepsilon; k) \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

$$\begin{aligned} w_{n+1}(i) &= (1-\varepsilon)w_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(w_n^2(i-1) + w_n^2(i+1)) + c_2 \\ &\quad + q(z_n(i), w_n(i), c_1, \varepsilon; k), \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

其中 $p(\cdot)$ 和 $q(\cdot)$ 是关于 $z_n(i), w_n(i), c_1, c_2$ 和 ε 的函数.

表示系统 (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3) 和 (2.4.4) 生成的空间 Julia 集为 J_s^1, J_s^2, J_{sk}^1 和 J_{sk}^2. 显然, 空间 Julia 集 J_{sk}^1 和 J_{sk}^2 随着参数 k 的变化而变化. 如果当 k 趋向于某常数 k_0 时, 耦合映像格子模型的空间 Julia 集 J_{sk}^1 和 J_{sk}^2 将变得相似或者

一样, 即

$$\lim_{k=k_0}(J_{sk}^2 \cup J_{sk}^2 - J_{sk}^2 \cap J_{sk}^2) = \emptyset \tag{2.4.5}$$

那么就称模型 (2.4.1) 和 (2.4.2) 的空间 Julia 集实现耦合.

当耦合项 $q[z_n(i), w_n(i), c_1, \varepsilon; k] = 0$, 则模型 (2.4.4) 将变为模型 (2.4.2), 当 k 趋向于某常数 k_0 时, 耦合映像格子模型的空间 Julia 集 J_{sk}^1 和 J_s^2 将变得相似或者一样, 即

$$\lim_{k=k_0}(J_s^2 \cup J_{sk}^2 - J_s^2 \cap J_{sk}^2) = \emptyset \tag{2.4.6}$$

那么就称模型 (2.4.1) 和 (2.4.2) 的空间 Julia 集实现同步. 另外, 下面讨论空间 Julia 集的轨迹的变化, 这是因为耦合映像格子模型的空间 Julia 集和它们的轨迹是紧密相关的.

当 $p[z_n(i), w_n(i), c_2, \varepsilon; k] \neq 0$, $q[z_n(i), w_n(i), c_1, \varepsilon; k] \neq 0$, 如果当 $n \to \infty$, 它们的轨迹满足 $|z_{n+1}(i) - w_{n+1}(i)| \to 0$, 那么同样可以说模型 (2.4.1) 和 (2.4.2) 的空间 Julia 集实现耦合.

当 $p[z_n(i), w_n(i), c_2, \varepsilon; k] \neq 0$, $q[z_n(i), w_n(i), c_1, \varepsilon; k] = 0$, 如果当 $n \to \infty$, 它们的轨迹满足 $|z_{n+1}(i) - w_{n+1}(i)| \to 0$, 那么也可以说模型 (2.4.1) 和 (2.4.2) 的空间 Julia 集实现同步.

因此我们可以通过实现空间 Julia 集迭代向量的轨迹同步来实现空间 Julia 集的同步. 另外, 取模型 (2.4.1) 和 (2.4.2) 的迭代初始向量值相同.

2.4.1　耦合映像格子模型的空间 Julia 集的梯度同步

为了阐述的方便, 表示

$$\begin{aligned} F(z_n(i), z_n(i-1), z_n(i+1)) &= (1-\varepsilon)z_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1) + z_n^2(i+1)) \\ &\quad + c_1, \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

$$G(w_n(i), w_n(i-1), w_n(i+1)) = (1-\varepsilon)w_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(w_n^2(i-1) + w_n^2(i+1))$$

$$+ c_2. \tag{2.4.8}$$

其中 c_1 和 c_2 是复参数并且 $c_1 \neq c_2$.

取耦合项 $p(\cdot) = -\frac{k}{1+k}[F(z_n(i), z_n(i-1), z_n(i+1)) - G(w_n(i), w_n(i-1), w_n(i+1))]$ 和 $q(\cdot) = 0$, 则耦合模型 (2.4.3) 变为

$$\begin{aligned} z_{n+1}(i) &= F(z_n(i), z_n(i-1), z_n(i+1)) - \frac{k}{1+k}[F(z_n(i), z_n(i-1), z_n(i+1)) \\ &\quad - G(w_n(i), w_n(i-1), w_n(i+1))]. \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

由方程 (2.4.7), (2.4.8) 和(2.4.9) 得

$$\begin{aligned} & z_{n+1}(i) - w_{n+1}(i) \\ = & \frac{1}{1+k}[F(z_n(i), z_n(i-1), z_n(i+1)) - G(w_n(i), w_n(i-1), w_n(i+1))] \\ = & \frac{1}{1+k}[(1-\varepsilon)(z_n^2(i) - w_n^2(i)) + \frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1) - w_n^2(i-1)) \\ & + \frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i+1) - w_n^2(i+1)) + c_1 - c_2] \\ = & \frac{1}{1+k}\{(1-\varepsilon)(z_n(i) - w_n(i))(z_n(i) + w_n(i)) + \frac{\varepsilon}{2}[(z_n(i-1) - w_n(i-1)) \\ & (z_n(i-1) + w_n(i-1)) + (z_n(i+1) - w_n(i+1))(z_n(i+1) - w_n(i+1))] \\ & + c_1 - c_2\}. \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

根据耦合映像格子模型的空间 Julia 集的定义知, 此空间 Julia 集是个闭集, 它可以通过对有界空间 S 中的向量进行迭代生成. 于是, 只需要考虑向量轨迹在有界空间 S 中的向量, 这是因为如果 $z(i) \notin J_s(F)$, 那么一定存在 n_0 使得 $F_{n_0}(z(i)) \notin S$. 又由于空间 S 是有界的, 所以一定存在 $M > 0$ 使得所有的 $z(i) \in S$ 满足 $|z(i)| < M$.

因此, 我们有

$$\begin{aligned} & |z_{n+1}(i) - w_{n+1}(i)| \\ \leq & \frac{1}{|1+k|}[2M(1-\varepsilon)|z_n(i) - w_n(i)| + M\varepsilon(|z_n(i-1) - w_n(i-1)| \\ & + |z_n(i+1) - w_n(i+1)|) + |c_1 - c_2|] \\ < & \frac{1}{|1+k|}(2M(1-\varepsilon)|z_n(i) - w_n(i)| + 4M^2\varepsilon + |c_1 - c_2|) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)|z_n(i)-w_n(i)| + \frac{1}{|1+k|}(4M^2\varepsilon + |c_1-c_2|) \\
&< \frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)[\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)|z_{n-1}(i)-w_{n-1}(i)| \\
&\quad +\frac{1}{|1+k|}(4M^2\varepsilon+|c_1-c_2|)] + \frac{1}{|1+k|}(4M^2\varepsilon+|c_1-c_2|) \\
&= (|\frac{1}{1+k}|2M(1-\varepsilon))^2|z_{n-1}(i)-w_{n-1}(i)| \\
&\quad +|\frac{1}{1+k}|(4M^2\varepsilon+|c_1-c_2|)(|\frac{1}{1+k}|2M(1-\varepsilon)+1) \\
&< \cdots \\
&< (\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon))^n|z_1(i)-w_1(i)| + \frac{1}{|1+k|}(4M^2\varepsilon+|c_1-c_2|) \\
&\quad [(\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon))^{n-1}+\cdots+\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)+1] \\
&= \frac{1}{|1+k|}|c_1-c_2|[(\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon))^n+(\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon))^{n-1}+\cdots \\
&\quad +\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)+1] + \frac{1}{|1+k|}4M^2\varepsilon[(\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon))^{n-1}+\cdots \\
&\quad +\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)+1] \\
&= \frac{1-[\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)]^{n+1}}{1-\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)}\frac{1}{|1+k|}|c_1-c_2| \\
&\quad +\frac{1-[\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)]^{n}}{1-\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)}\frac{1}{|1+k|}4M^2\varepsilon. \qquad (2.4.11)
\end{aligned}
$$

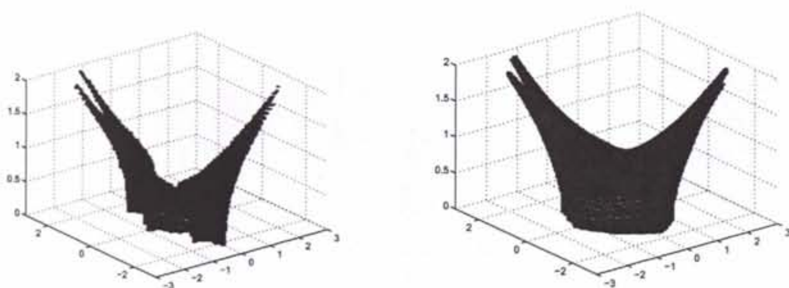
当 $\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)<1$, 则不等式 (2.4.11) 的右边的极限为

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\{\frac{1-(\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon))^{n+1}}{1-\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)}\frac{1}{|1+k|}|c_1-c_2| \\
&+\frac{1-(\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon))^{n}}{1-\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)}\frac{1}{|1+k|}4M^2\varepsilon\} \\
&=\frac{\frac{1}{|1+k|}(|c_1-c_2|+4M^2\varepsilon)}{1-\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)}. \qquad (2.4.12)
\end{aligned}
$$

注意到

$$\frac{1}{|1+k|}(|c_1-c_2|+4M^2\varepsilon)\to 0,$$

即, $|1+k|\to\infty$, 则 $k\to\infty$. 由不等式 (2.4.11) 和极限 (2.4.12) 得 $|z_{n+1}(i)-w_{n+1}(i)|\to 0$. 因此, 耦合映像格子模型 (2.4.1) 和(2.4.2) 的空间 Julia 集的轨迹实现同步.



(a) 当 $c_1 = -1$ 时, 耦合映像格子模型 (2.4.13) 的空间 Julia 集

(b) 当 $c_2 = -0.2 + 0.1i$ 时, 耦合映像格子模型 (2.4.14) 的空间 Julia 集

图 2.5: 耦合映像格子模型 (2.4.13) 和(2.4.14) 的空间 Julia 集.

同样地, 取耦合映像格子模型的格子长度为 2, 作为例子来说明利用梯度控制方法实现空间 Julia 集的同步. 当 $L = 2$ 时, 模型 (2.4.1) 和 (2.4.2) 变为

$$\left\{\begin{array}{l} z_{n+1}(1) = (1-\varepsilon)z_n^2(1) + \varepsilon z_n^2(2) + c_1, \\ z_{n+1}(2) = (1-\varepsilon)z_n^2(2) + \varepsilon z_n^2(1) + c_1. \end{array}\right. \tag{2.4.13}$$

和

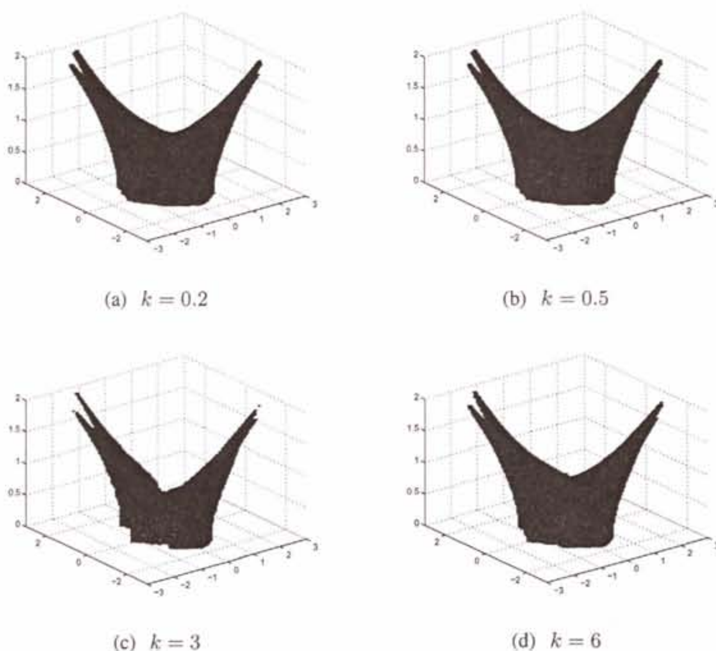
$$\left\{\begin{array}{l} w_{n+1}(1) = (1-\varepsilon)w_n^2(1) + \varepsilon w_n^2(2) + c_2, \\ w_{n+1}(2) = (1-\varepsilon)w_n^2(2) + \varepsilon w_n^2(1) + c_2. \end{array}\right. \tag{2.4.14}$$

加耦合项 $p_1(\cdot) = -\frac{k}{1+k}[(1-\varepsilon)z_n^2(1)+\varepsilon z_n^2(2)+c_1-((1-\varepsilon)w_n^2(1)+\varepsilon w_n^2(2)+c_2)]$ 和 $p_2(\cdot) = -\frac{k}{1+k}[z_{n+1}(2) = (1-\varepsilon)z_n^2(2)+\varepsilon z_n^2(1)+c_1-((1-\varepsilon)w_n^2(2)+\varepsilon w_n^2(1)+c_2)]$ 到模型 (2.4.13), 则有

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_{n+1}(1) & = & \frac{1}{1+k}[(1-\varepsilon)z_n^2(1) + \varepsilon z_n^2(2) + c_1] \\ & & + \frac{k}{1+k}[(1-\varepsilon)w_n^2(1) + \varepsilon w_n^2(2) + c_2], \\ z_{n+1}(2) & = & \frac{1}{1+k}[(1-\varepsilon)z_n^2(2) + \varepsilon z_n^2(1) + c_1] \\ & & + \frac{k}{1+k}[(1-\varepsilon)w_n^2(2) + \varepsilon w_n^2(1) + c_2]. \end{array}\right. \tag{2.4.15}$$

当 $\frac{1}{|1+k|}|2M(1-\varepsilon)| < 1$ 和 $k \to \infty$, 模型 (2.4.13) 和 (2.4.14) 的空间 Julia 集的

轨迹实现同步. 当 $c_1 = -1$ 和 $c_2 = -0.2 + 0.1i$ 时耦合映像格子模型 (2.4.13) 和 (2.4.14) 的空间 Julia 集如图 2.5 所示, 而它们的同步情形如图 2.6 所示, 可见随着控制参数 k 的增加, 耦合映像格子模型 (2.4.15) 的空间 Julia集渐近地向耦合映像格子模型 (2.4.14) 的空间 Julia 集变化. 当 $k \to \infty$ 时, 耦合映像格子模型 (2.4.15) 的空间 Julia集趋向于耦合映像格子模型 (2.4.14) 的空间 Julia集. 因此, 耦合映像格子模型 (2.4.13) 和 (2.4.14) 的空间 Julia 集实现了同步.



(a) $k = 0.2$　(b) $k = 0.5$

(c) $k = 3$　(d) $k = 6$

图 2.6: 利用梯度控制方法实现的耦合映像格子模型 (2.4.13) 和 (2.4.14) 的空间 Julia 集随控制参数 k 变化的同步情形.

通过取 (2.4.6) 的极限, 实现了耦合映像格子空间 Julia 集的同步. 换句话说, 通过实现空间 Julia 集的轨迹同步进而实现其空间 Julia 集的同步. 当 $k \to k_0$ 时的空间 Julia 集, 说明了耦合映像格子模型的空间 Julia 集的同步情形.

2.4.2　耦合映像格子模型的空间 Julia 集的最优函数同步

取耦合项 $p(\cdot) = -k[F(z_n(i), z_n(i-1), z_n(i+1)) - G(w_n(i), w_n(i-1), w_n(i+$

1))] 和 $q(\cdot)=0$, 则我们有

$$\begin{aligned} z_{n+1}(i) &= (1-\varepsilon)z_n^2(i)+\frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1)+z_n^2(i+1))+c_1+p(\cdot) \\ &= (1-\varepsilon)z_n^2(i)+\frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1)+z_n^2(i+1))+c_1-k[F(\cdot)-G(\cdot)] \\ &= (1-k)[(1-\varepsilon)z_n^2(i)+\frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1)+z_n^2(i+1))+c_1] \\ &\quad +k[(1-\varepsilon)w_n^2(i)+\frac{\varepsilon}{2}(w_n^2(i-1)+w_n^2(i+1))+c_2]. \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

由于耦合映像格子模型的空间 Julia 集是个闭集, 只需要考虑迭代向量轨迹在有界空间 S 中的向量, 又由于空间 S 是有界的, 所以一定存在 $M>0$ 使得所有的 $z(i)\in S$ 满足 $|z(i)|<M$.

于是, 我们有

$$\begin{aligned} &|z_{n+1}(i)-w_{n+1}(i)| \\ \leq\ & |1-k|[2M(1-\varepsilon)|z_n(i)-w_n(i)|+M\varepsilon(|z_n(i-1)-w_n(i-1)| \\ & +|z_n(i+1)-w_n(i+1)|)+|c_1-c_2|] \\ <\ & |1-k|(2M(1-\varepsilon)|z_n(i)-w_n(i)|+4M^2\varepsilon+|c_1-c_2|) \\ =\ & |1-k|2M(1-\varepsilon)|z_n(i)-w_n(i)|+|1-k|(4M^2\varepsilon+|c_1-c_2|) \\ <\ & |1-k|2M(1-\varepsilon)[|1-k|2M(1-\varepsilon)|z_{n-1}(i)-w_{n-1}(i)| \\ & +|1-k|(4M^2\varepsilon+|c_1-c_2|)]+|1-k|(4M^2\varepsilon+|c_1-c_2|) \\ =\ & (|1-k|2M(1-\varepsilon))^2|z_{n-1}(i)-w_{n-1}(i)|+|1-k|(4M^2\varepsilon \\ & +|c_1-c_2|)(|1-k|2M(1-\varepsilon)+1) \\ <\ & \cdots \\ <\ & (|1-k|2M(1-\varepsilon))^n|z_1(i)-w_1(i)|+|1-k|(4M^2\varepsilon \\ & +|c_1-c_2|)(|1-k|2M(1-\varepsilon)^{n-1}+\cdots+|1-k|2M(1-\varepsilon)+1) \\ =\ & |1-k||c_1-c_2|[(|1-k|2M(1-\varepsilon))^n+(|1-k|2M(1-\varepsilon))^{n-1} \\ & +\cdots+|1-k|2M(1-\varepsilon)+1]+|1-k|4M^2\varepsilon[(|1-k|2M(1-\varepsilon))^{n-1} \\ & +\cdots+|1-k|2M(1-\varepsilon)+1] \\ =\ & \frac{1-(|1-k|2M(1-\varepsilon))^{n+1}}{1-|1-k|2M(1-\varepsilon)}|1-k||c_1-c_2| \\ & +\frac{1-(|1-k|2M(1-\varepsilon))^n}{1-|1-k|2M(1-\varepsilon)}|1-k|4M^2\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

其中 $|1-k|2M(1-\varepsilon)<1$, 那么不等式 (2.4.17) 的右边的极限为

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\{\frac{1-(|1-k|2M(1-\varepsilon))^{n+1}}{1-|1-k|2M(1-\varepsilon)}|1-k||c_1-c_2| \\
&+\frac{1-(|1-k|2M(1-\varepsilon))^{n}}{1-|1-k|2M(1-\varepsilon)}|1-k|4M^2\varepsilon\} \\
&=\frac{|1-k|(|c_1-c_2|+4M^2\varepsilon)}{1-|1-k|2M(1-\varepsilon)}.
\end{aligned} \tag{2.4.18}$$

如果

$$|1-k|(|c_1-c_2|+4M^2\varepsilon)\to 0,$$

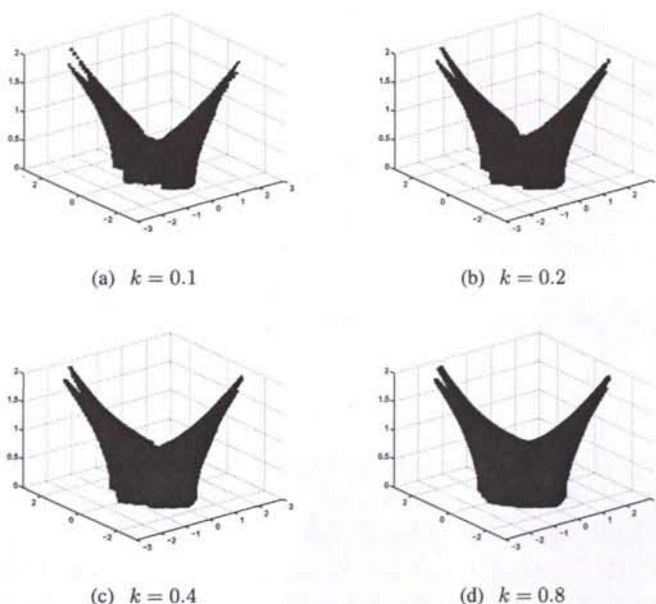
即, $k\to 1$ 时, 那么由不等式 (2.4.17) 和极限 (2.4.18), 得 $|z_{n+1}(i)-w_{n+1}(i)|\to 0$. 因此, 耦合映像格子模型 (2.4.1) 和 (2.4.2) 的空间 Julia 集的轨迹实现同步.

同样地, 取耦合映像格子模型的格子长度为 2, 作为例子说明利用最优函数控制方法实现空间 Julia 集的同步. 分别加耦合项 $p_1(\cdot)=-k[(1-\varepsilon)z_n^2(1)+\varepsilon z_n^2(2)+c_1-((1-\varepsilon)w_n^2(1)+\varepsilon w_n^2(2)+c_2)]$ 和 $p_2(\cdot)=-k[z_{n+1}(2)=(1-\varepsilon)z_n^2(2)+\varepsilon z_n^2(1)+c_1-((1-\varepsilon)w_n^2(2)+\varepsilon w_n^2(1)+c_2)]$ 到模型 (2.4.13), 则有

$$\begin{cases}
z_{n+1}(1) &= (1-k)[(1-\varepsilon)z_n^2(1)+\varepsilon z_n^2(2)+c_1] \\
&\quad +k[(1-\varepsilon)w_n^2(1)+\varepsilon w_n^2(2)+c_2], \\
z_{n+1}(2) &= (1-k)[(1-\varepsilon)z_n^2(2)+\varepsilon z_n^2(1)+c_1] \\
&\quad +k[(1-\varepsilon)w_n^2(2)+\varepsilon w_n^2(1)+c_2].
\end{cases} \tag{2.4.19}$$

当 $|1-k|2M(1-\varepsilon)<1$ 并且 $k\to 1$ 时, 模型 (2.4.13) 和 (2.4.14) 的空间 Julia 集的轨迹实现同步.

同样地, 取复参数 $c_1=-1$ 和 $c_2=-0.2+0.1i$, 利用最优函数控制方法实现的空间 Julia 集的同步如图 2.7 所示. 可见, 随着控制参数 k 的增加, 耦合映像格子模型 (2.4.19) 的空间 Julia集渐近地向耦合映像格子模型 (2.4.14) 的空间 Julia集变化. 当 $k\to 1$ 时, 耦合映像格子模型 (2.4.19) 的空间 Julia集变为耦合映像格子模型 (2.4.14) 的空间 Julia 集, 也就是说模型 (2.4.13) 和 (2.4.14) 的空间 Julia 集实现同步.



(a) $k = 0.1$　(b) $k = 0.2$

(c) $k = 0.4$　(d) $k = 0.8$

图 2.7: 最优函数控制方法实现耦合映像格子模型 (2.4.13) 和 (2.4.14) 的空间 Julia 集随着控制参数 k 变化的同步情形.

2.4.3 耦合映像格子模型的空间 Julia 集的耦合同步

分别取耦合项为 $p[z_n(i), w_n(i), c_2, \varepsilon; k] = k(G(\cdot) - F(\cdot))$ 和 $q[z_n(i), w_n(i), c_1, \varepsilon; k] = k(F(\cdot) - G(\cdot))$, 则有

$$\begin{aligned} z_{n+1}(i) &= F + k(G(\cdot) - F(\cdot)), & (2.4.20) \\ w_{n+1}(i) &= G + k(F(\cdot) - G(\cdot)), & (2.4.21) \end{aligned}$$

其中 $F(\cdot)$ 和 $G(\cdot)$ 是上面定义的函数. 于是, 我们有

$$\begin{aligned} & |z_{n+1}(i) - w_{n+1}(i)| \\ = \ & |1 - 2k||F(\cdot) - G(\cdot)| \\ = \ & |1 - 2k||(1-\varepsilon)z_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1) + z_n^2(i+1)) + c_1 \\ & -((1-\varepsilon)w_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(w_n^2(i-1) + w_n^2(i+1)) + c_2)| \\ = \ & |1 - 2k||(1-\varepsilon)(z_n^2(i) - w_n^2(i)) + \frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1) - w_n^2(i-1)) \\ & + \frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i+1) - w_n^2(i+1)) + c_1 - c_2| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2M|1-2k||1-\varepsilon||z_n(i)-w_n(i)|+|1-2k|(4\varepsilon M^2+|c_1-c_2|)\\
&\leq 2M|1-2k||1-\varepsilon|[2M|1-2k||1-\varepsilon||z_{n-1}(i)-w_{n-1}(i)|\\
&\quad +|1-2k|(4\varepsilon M^2+|c_1-c_2|)]+|1-2k|(4\varepsilon M^2+|c_1-c_2|)\\
&= (2M|1-2k||1-\varepsilon|)^2|z_{n-1}(i)-w_{n-1}(i)|\\
&\quad +(4\varepsilon M^2+|c_1-c_2|)(2M|1-2k||1-\varepsilon|+1)\\
&< \cdots\\
&< (2M|1-2k||1-\varepsilon|)^{n-1}|z_2(i)-w_2(i)|\\
&\quad +|1-2k|(4\varepsilon M^2+|c_1-c_2|)[(2M|1-2k||1-\varepsilon|)^{n-2}\\
&\quad +\cdots+1].
\end{aligned}
\tag{2.4.22}
$$

当 $n=1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
|z_2(i)-w_2(i)| &= |2M(1-2k)(1-\varepsilon)||c_1-c_2|\\
&\quad +|1-2k|(4\varepsilon M^2+|c_1-c_2|).
\end{aligned}
\tag{2.4.23}
$$

根据 (2.4.22) 和 (2.4.23)，有

$$
\begin{aligned}
&|z_{n+1}(i)-w_{n+1}(i)|\\
&< (2M|1-2k||1-\varepsilon|)^{n-1}[|2M(1-2k)(1-\varepsilon)||c_1-c_2|+|1-2k|(4\varepsilon M^2\\
&\quad +|c_1-c_2|)]+|1-2k|(4\varepsilon M^2+|c_1-c_2|)[(2M|1-2k||1-\varepsilon|)^{n-2}\\
&\quad +\cdots+2M|1-2k||1-\varepsilon|+1]\\
&= |1-2k|(4\varepsilon M^2+|c_1-c_2|)[(2M|1-2k||1-\varepsilon|)^{n-1}+\cdots+1]\\
&\quad +(2M|1-2k||1-\varepsilon|)^n|c_1-c_2|\\
&= \frac{1-(2M|1-2k||1-\varepsilon|)^n}{1-2M|1-2k||1-\varepsilon|}|1-2k|(4\varepsilon M^2+|c_1-c_2|)\\
&\quad +(2M|1-2k||1-\varepsilon|)^n|c_1-c_2|.
\end{aligned}
\tag{2.4.24}
$$

当 $2M|1-2k||1-\varepsilon|<1$ 时，(2.4.24) 的等号右边式子的极限为

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1-(2M|1-2k||1-\varepsilon|)^n}{1-2M|1-2k||1-\varepsilon|}|1-2k|(4\varepsilon M^2+|c_1-c_2|)\\
&\quad +(2M|1-2k||1-\varepsilon|)^n|c_1-c_2|\Big)
\end{aligned}
$$

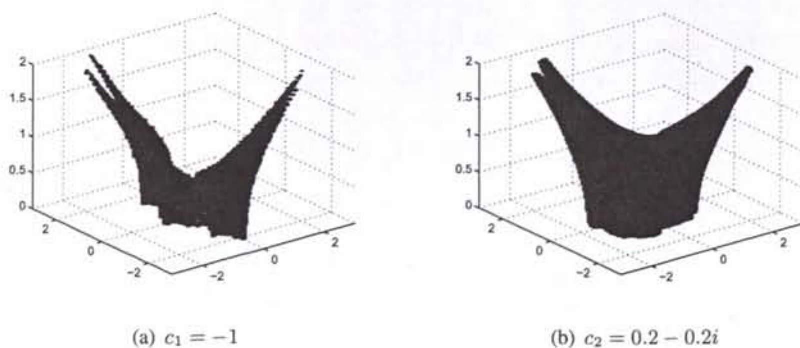
$$= \frac{1}{1-2M|1-2k||1-\varepsilon|}|1-2k|(4\varepsilon M^2+|c_1-c_2|), \qquad (2.4.25)$$

则有

$$\begin{aligned} & |z_{n+1}(i)-w_{n+1}(i)| \\ < & \frac{1}{1-2M|1-2k||1-\varepsilon|}|1-2k|(4\varepsilon M^2+|c_1-c_2|) \\ = & \frac{1}{\frac{1}{|1-2k|}-2M|1-\varepsilon|}(4\varepsilon M^2+|c_1-c_2|). \end{aligned} \qquad (2.4.26)$$

当 $\frac{1}{|1-2k|}\to\infty$, 有 $|1-2k|\to 0$, 即 $k\to 0.5$ 时, 由 (2.4.26) 得 $|z_{n+1}(i)-w_{n+1}(i)|\to 0$. 因此, 当 $k\to 0.5$ 时, 耦合映像格子模型 (2.4.1) 和 (2.4.2) 的空间 Julia 集的轨迹变得相同, 也就是说, 耦合映像格子模型 (2.4.1) 和 (2.4.2) 的空间 Julia 集实现了耦合同步. 另外, 当控制参数 $k\to 0.5$ 时, 两个不同的空间 Julia 集向同一个空间 Julia 集变化.

同样地, 取耦合映像格子模型的格子长度为 2 作为例子, 说明利用线性耦合的方法实现空间 Julia 集的同步.



(a) $c_1=-1$　　(b) $c_2=0.2-0.2i$

图 2.8: 耦合映像格子模型 (2.4.13) 和 (2.4.14) 的空间 Julia 集.

当 $L=2$ 时, 可得耦合项

$$\begin{cases} p_1 = k[(1-\varepsilon)w_n^2(1)+\varepsilon w_n^2(2)+c_2-((1-\varepsilon)z_n^2(1)+\varepsilon z_n^2(2)+c_1)], \\ p_2 = k[(1-\varepsilon)w_n^2(2)+\varepsilon w_n^2(1)+c_2-((1-\varepsilon)z_n^2(2)+\varepsilon z_n^2(1)+c_1)] \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} q_1 = k[(1-\varepsilon)z_n^2(1)+\varepsilon z_n^2(2)+c_1-((1-\varepsilon)w_n^2(1)+\varepsilon w_n^2(2)+c_2)], \\ q_2 = k[(1-\varepsilon)z_n^2(2)+\varepsilon z_n^2(1)+c_1-((1-\varepsilon)w_n^2(2)+\varepsilon w_n^2(1)+c_2)] \end{cases}$$

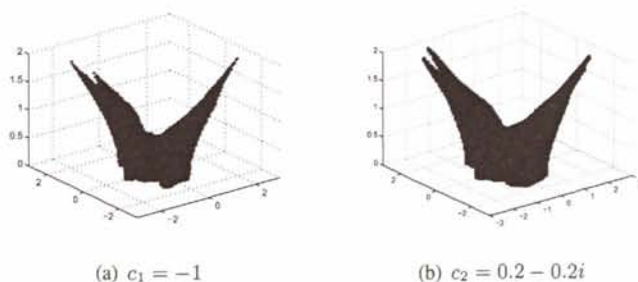
将耦合项 $p_i(\cdot)$ 和 $q_i(\cdot)(i=1,2)$ 分别加到耦合映像格子模型 (2.4.13) 和 (2.4.14), 有

$$\begin{cases} z_{n+1}(1) = (1-k)[(1-\varepsilon)z_n^2(1)+\varepsilon z_n^2(2)+c_1]+k[(1-\varepsilon)w_n^2(1) \\ \qquad +\varepsilon w_n^2(2)+c_2], \\ z_{n+1}(2) = (1-k)[(1-\varepsilon)z_n^2(2)+\varepsilon z_n^2(1)+c_1]+k[(1-\varepsilon)w_n^2(2) \\ \qquad +\varepsilon w_n^2(1)+c_2] \end{cases} \tag{2.4.27}$$

和

$$\begin{cases} w_{n+1}(1) = (1-k)[(1-\varepsilon)w_n^2(1)+\varepsilon w_n^2(2)+c_1]+k[(1-\varepsilon)z_n^2(1) \\ \qquad +\varepsilon z_n^2(2)+c_2], \\ w_{n+1}(2) = (1-k)[(1-\varepsilon)w_n^2(2)+\varepsilon w_n^2(1)+c_1]+k[(1-\varepsilon)z_n^2(2) \\ \qquad +\varepsilon z_n^2(1)+c_2]. \end{cases} \tag{2.4.28}$$

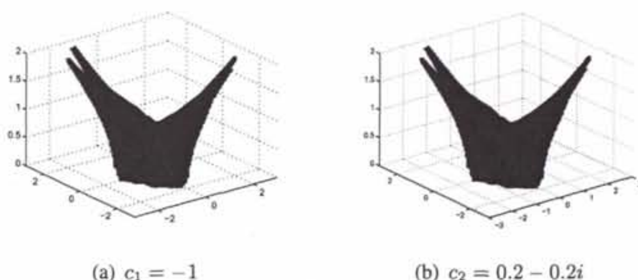
当 $2M|1-2k||1-\varepsilon|<1$ 和 $k\to 0.5$ 时, 耦合映像格子模型 (2.4.13) 和 (2.4.14)



(a) $c_1=-1$　　(b) $c_2=0.2-0.2i$

图 2.9: 当 $k=0.1$, 耦合映像格子模型 (2.4.13) 和 (2.4.14) 的空间 Julia 集的耦合同步情形.

的空间 Julia 集实现了耦合同步, 其空间 Julia 集的耦合同步的情形如图 2.8-2.10 所示. 图 2.8 是当 $c_1=-1$ 和 $c_2=0.2-0.2i$ 时, 耦合映像格子模型 (2.4.13)



(a) $c_1 = -1$　　(b) $c_2 = 0.2 - 0.2i$

图 2.10: 当 $k = 0.45$, 耦合映像格子模型 (2.4.13) 和 (2.4.14) 的空间 Julia 集的耦合同步情形.

和 (2.4.14) 的空间 Julia 集. 图 2.9 和 2.10 展示了随着 k 的变化, 当 $k \to 0.5$ 时耦合映像格子模型 (2.4.27) 和 (2.4.28) 的空间 Julia 集变得越来越相似, 也就是说, 随控制参数 k 无限的接近 0.5, 两个不同的耦合映像格子模型的空间 Julia 集渐进地向同一个空间 Julia集变化, 即它们实现了耦合同步.

2.5 小结

首先给出了耦合映像格子模型的空间 Julia 集的基本理论, 然后利用梯度控制、最优函数控制和辅助参考控制方法, 通过控制不动平面的稳定性, 实现了对空间 Julia 集的有效控制. 然后, 利用多种控制方法实现了不同空间 Julia 集的轨迹同步, 进而实现了不同空间 Julia 集的同步. 这些控制方法在实现空间 Julia 集的控制和同步过程中的成功应用, 对于进一步研究空间分形具有重要意义.

空间 Julia 集的同步应用于通讯安全能进一步增强安全性, 这是因为耦合映像格子模型的空间 Julia 集是由一个离散复系统的有界复状态向量迭代产生的, 而复变量的个数是实变量个数的双倍. 故耦合映像格子模型的空间 Julia 集的同步有望很好的应用到通讯安全中.

另外, 在本部分的所有仿真中, 我们选取复平面 $z(2)$ 和切平面 $x(2) = y(2) = t$. 由于切平面的选取与空间 Julia 集的主分叉方向有关, 所以在本章所有的仿真图中主分叉方向是一致的. 其它情况也是相似的, 这里不再赘述. **本章内容已发表在国际期刊 Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 和 Indian Journal of physics 上.**

第三章　空间混沌 Julia 集的控制与同步

3.1　引言

上一章讨论了以时空混沌模型的空间分形集的控制与同步, 但耦合映像格子模型本身存在着诸多的限制条件

1. 耦合映像格子模型是建立在非线性 Logistic 系统上的一类特殊的格子模型. 但事实上, 迭代函数可以很复杂.

2. 格子的大小 i 被规定为有限的边界 L. 但事实上, L 可为无穷大.

3. 对于耦合映像格子模型的已有研究结果是取 $i = 1, 2, \cdots, L$, 简化为一元函数来进行讨论的. 一维的方程是一个双指标的空间迭代时间序列, 即是一个双变量函数, 但过去的研究却并没有依照二元函数的特征从空间意义上去处理.

4. 双指标迭代序列的运动状态是空间变化行为, 它的运动形态应当是空间迭代运动的轨迹. 但现有研究结果并没有指出它的二维迭代是如何进行的. 而这一关键问题的解决, 将展现出系统空间动力行为, 是现有的关于耦合映像格子模型的结果只能按照一维的情形进行讨论的决定因素.

在近期关于高维混沌的研究中, 刘树堂教授等人以物理中带强迫项的一维对流方程的一般形式为基础, 对空间混沌的控制与同步进行了深入研究, 获得了关于空间混沌控制的大量成果, 如空间混沌系统的控制, 空间混沌系统的线性广义同步和非线性广义同步等, 使得空间混沌理论成为经典的一维混沌系统的自然推广, 同时也解决了耦合映像格子模型不可避免的限制条件[56, 57].

混沌理论与分形理论是密不可分的, 其中 Julia 集理论又是混沌与分形理论共同研究的焦点问题. 当前, 如何以实现空间混沌为基础建立空间 Julia 集的控制与同步是需要解决的问题, 本章以空间混沌控制的理论为基础, 讨论空间混沌 Julia 集的控制和同步.

3.2 空间混沌 Julia 集及其稳定区域

考虑含有两个独立变量的分布参数形式的复动力系统

$$z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = f(c,\ (1+a)z_{m,n}), \tag{3.2.1}$$

其中 $f(\cdot)$ 是一个非线性函数, a 是一个实参数且 $a \neq -1$. 当 $a=0$, $n=n_0$ 时, 如果令

$$f(z_{m,n_0}) = z_{m,n_0}^2 + c,$$

则有

$$z_{m+1,n_0} = z_{m,n_0}^2 + c. \tag{3.2.2}$$

复迭代二次多项式 (3.2.2) 即是产生我们所熟悉的 Julia 集和 Mandelbrot 集的经典系统.

注意到, 复动力系统 (3.2.1) 是

$$\frac{\partial\omega(z,v)}{\partial z} + a\frac{\partial\omega(z,v)}{\partial v} = f((1+a)\omega(z,v)), \tag{3.2.3}$$

的离散情形, 而 (3.2.3) 是物理上的二维复对流系统, 因此对于离散系统 (3.2.1) 的研究可以为研究连续系统 (3.2.3) 提供有用的信息. 系统 (3.2.1) 含有两个独立的变量, 从而其运动状态是空间运动行为, 可称此系统为多变量复动力系统.

引入下面的概念和结论[24, 58].

定义 3.1. 对于系统 (3.2.1), 如果一个状态 $z_{m,n}$ 在迭代过程中呈现出周期性特征, 并且与它差别微小的点经过迭代之后均离它远去, 即表现出斥性特征, 则状态 $z_{m,n}$ 称为系统 (3.2.1) 的空间斥性周期点.

定义 3.2. 空间斥性周期点的闭包称为空间混沌 Julia 集.

令 N_r={r, r+1, r+2, $\cdots$ | r 是非负整数}.

定义 3.3. 对于 $m,\ n \in N_r$, 设 $z_{m,n} = z^*$, 如果 z^* 是方程 $(1+a)z - f(c,\ (1+a)z) = 0$ 的根, 则 z^* 称为系统(3.2.1)的一个不动平面.

引理 3.1. 如果空间复动力系统 (3.2.1) 和 $z^* = z_{m,n}$ 满足 $|f'((1+a)z_{m,n})| \leq \frac{1+|a|}{|1+a|}$, 那么 z^* 是系统 (3.2.1) 的稳定不动平面.

引理 3.2. 对于空间复动力系统 (3.2.1), 如果 $z_{m,n}$ 是系统空间混沌 *Julia* 集上的点, 则它应当满足

$$|f'((1+a)z_{m,n})| > \begin{cases} \frac{a}{1+a}, & |a| > 1; \\ \frac{1}{2}, & a = 1; \\ \frac{1}{1+a}, & |a| < 1. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

引理 3.3. 如果 ϱ 是稳定的不动平面, 那么

$$\partial S(\varrho) = J_s(f),$$

其中 ∂S 表示稳定空间 S 的边界, J_s 表示空间混沌 *Julia* 集.

取 $f((1+a)z_{m,n}) = (1+a)^2 z_{m,n}^2 + c$, 则有

$$z_{m+1,n} + a z_{m,n+1} = (1+a)^2 z_{m,n}^2 + c, \tag{3.2.5}$$

其中 c 为复参数, 称系统 (3.2.5) 为空间混沌 Julia 系统.
基于上面的基本理论, 得出下列结论

定理 3.1. 对于任意 $m, n \in N_r$, 空间混沌 *Julia* 系统 (3.2.5) 的不动平面是 $z_{m,n} = z^* = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2(1+a)}$.

证明: 由定义 3.3 知, 系统 (3.2.5) 的不动平面是方程 $((1+a)z)^2 - (1+a)z + c = 0$ 的根, 从而有 $z_{m,n} = z^* = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2(1+a)}$. □

定理 3.2. 设 $\mathbf{D}_\tau$, $\tau = 1, 2$ 为下列集合, 记

$$\mathbf{D}_\tau = \begin{cases} \{z : z = \frac{1}{2}\nu e^{i\theta}(1 - \frac{1}{2}\nu e^{i\theta}), 0 \leq \nu < \frac{1}{1+a}, (0 \leq \theta \leq 2\pi), \tau = 1\}, 0 \leq a, \\ \{z : z = \frac{1}{2}\nu e^{i\theta}(1 - \frac{1}{2}\nu e^{i\theta}), 0 \leq \nu < \frac{1-a}{(1+a)^2}, (0 \leq \theta \leq 2\pi), \tau = 2\}, -1 < a < 0, a < -1 \end{cases} \tag{3.2.6}$$

且 $a \neq -1$, 如果系统 (3.2.5) 中的复参数满足 $c \in \mathbf{D}_\tau$, 则空间混沌 *Julia* 系统存

在不动平面, 且不动平面是稳定的, 即当 $c \in \mathbf{D}_\tau$ 时, 系统 (3.2.5) 是稳定的, 也可以说 $\mathbf{D}_\tau$, $\tau = 1, 2$ 是空间混沌 *Julia* 集的稳定区域.

证明: 设 $f_c((1+a)z_{m,n}) = (1+a)^2z^2 + c$, 则 $|f'((1+a)z^*)| = |2(1+a)^2z^*|$. 由定理 3.1 知, 空间混沌 Julia 集的不动平面为 $z^* = \frac{1\pm\sqrt{1-4c}}{2(1+a)}$, 故 $|f'((1+a)z^*)| = |(1+a) \pm |1+a|\sqrt{1-4c}|$. 又由引理 3.1 知, 当 $0 \le a$ 时, 有

$$|f'((1+a)z^*)| < 1,$$

然后有

$$|1 \pm \sqrt{1-4c}| < \frac{1}{1+a}. \tag{3.2.7}$$

而 (3.2.7) 等价于

$$1 \pm \sqrt{1-4c} \in \{z : z = \nu e^{i\theta}, 0 \le \nu < \frac{1}{1+a}, 0 < \theta < 2\pi\}, \tag{3.2.8}$$

由 (3.2.7) 或 (3.2.8) 决定的 c 的变化范围是

$$c = \{z : z = \frac{1}{2}\nu e^{i\theta}(1 - \frac{1}{2}\nu e^{i\theta}), 0 \le \nu < \frac{1}{1+a}, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

令

$$\mathbf{D}_1 = \{z : z = \frac{1}{2}\nu e^{i\theta}(1 - \frac{1}{2}\nu e^{i\theta}), 0 \le \nu < \frac{1}{1+a}, 0 < \theta < 2\pi\},$$

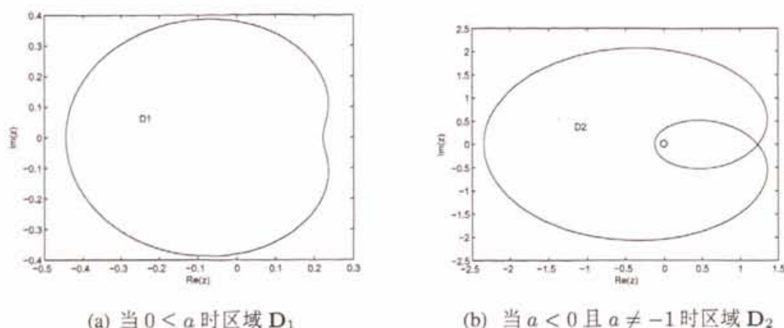
故 $c \in \mathbf{D}_1$ 时, 空间混沌 Julia 系统 (3.2.5) 有稳定的不动平面, 即系统 (3.2.5) 是稳定的. □

同样可证, 当 $a < 0$ 且 $a \neq -1$ 时系统 (3.2.5) 的稳定区域为

$$\mathbf{D}_2 = \{z : z = \frac{1}{2}\nu e^{i\theta}(1 - \frac{1}{2}\nu e^{i\theta}), 0 \le \nu < \frac{1-a}{(1+a)^2}, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

空间混沌 Julia 系统的稳定区域 $\mathbf{D}_1$ 和 $\mathbf{D}_2$, 如图 3.1(a), (b) 所示. 当 $a = -1$ 时, 空间混沌 Julia 系统 (3.2.5) 变为 $c \equiv 0$, 故稳定区域 $\mathbf{D}_2$ 应该除去点 $c = 0$(图

3.1(b)的圆点).



(a) 当 $0 \leq a$ 时区域 $\mathbf{D}_1$ (b) 当 $a < 0$ 且 $a \neq -1$ 时区域 $\mathbf{D}_2$

图 3.1: 在不同 a 的条件下系统 (3.2.5) 的稳定区域 $\mathbf{D}$.

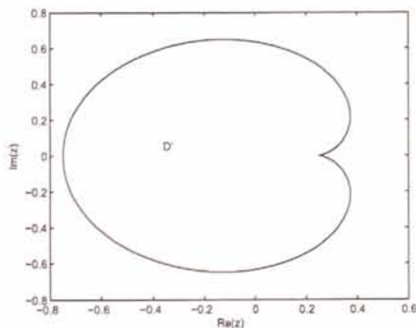


图 3.2: 当 $a = 0$ 时稳定区域 $\mathbf{D}'$.

注 3.1. 当 $a = 0,\ n = n_0 = 0$ 时, 令 $z_{m,n_0} = z_m$, 则空间混沌 Julia 系统变为经典的复迭代系统

$$z_{m+1} = z_m^2 + c.$$

由定理 3.1 知不动平面为 $z_m = z^* = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$. 又由定理 3.2 知此不动平面稳定的条件为

$$c \in \mathbf{D}' = \{z : z = \frac{1}{2}\nu e^{i\theta}(1 - \frac{1}{2}\nu e^{i\theta}),\ 0 \leq \nu < 1,\ 0 < \theta < 2\pi\},$$

此时稳定区域 $\mathbf{D}'$ 如图 3.2 所示. 由 Julia 集的性质知, 这就是稳定不动平面的存在条件. 因此, 空间混沌 Julia 集的稳定区域, 是一维 Julia 集吸引域的自然推广.

3.3 空间混沌 Julia 集的辅助参考控制

在系统 (3.2.5) 中引入辅助参考控制项

$$z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = (1+a)^2 z_{m,n}^2 + c + g_{m,n}[(1+a)z_{m,n} - z_{ref}], \qquad (3.3.1)$$

其中 z_{ref} 是辅助参考控制项, $g_{m,n}$ 是反馈控制项. 取

$$g_{m,n} = kz_{ref} + \sum_{i=0}^{\mu}\sum_{j=0}^{\nu} w_{i,j} z_{m-i,n-j} \qquad (3.3.2)$$

其中 k, $w_{i,j}$ 是与系统 (3.3.1) 相关的参数.

为了简化计算, 取 $\mu = \nu = 0$, 则有

$$g_{m,n} = kz_{ref} + w_{0,0} z_{m,n}, \qquad (3.3.3)$$

然后有

$$\begin{aligned} z_{m+1,n} + az_{m,n+1} &= ((1+a)^2 + (1+a)w_{0,0})z_{m,n}^2 + ((1+a)k \\ &\quad - w_{0,0})z_{m,n}z_{ref} - kz_{ref}^2 + c. \end{aligned} \qquad (3.3.4)$$

令

$$\begin{cases} \alpha = (1+w)^2 + (1+w)a_{0,0}, \\ \beta = ((1+w)k - a_{0,0})z_{ref}, \\ \gamma = -kz_{ref}^2 + c, \end{cases}$$

则有 $z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = \alpha z_{m,n}^2 + \beta z_{m,n} + \gamma$. 令

$$\begin{aligned} f(z) &= ((1+w)^2 + (1+w)a_{0,0})z^2 + ((1+w)k - a_{0,0})z_{ref}z + c - kz_{ref}^2 \\ &= \alpha z^2 + \beta z_{ref} z + \gamma. \end{aligned}$$

由引理 3.3 知 $J(f) = \partial S(z^*)$, 其中 z^* 是 $f(\cdot)$ 的不动平面. $S(z^*)$ 是 z^* 的稳定

空间. 如果使系统 (3.2.5) 的不动平面 z^* 是稳定的, 则需要同时满足

$$(1+a)^2(z^*)^2-(1+a)z^*+c=0 \tag{3.3.5}$$

和

$$\alpha(z^*)^2-(1+a)z^*+\beta z^*+\gamma=0. \tag{3.3.6}$$

又控制系统 (3.3.4) 的不动平面为 $z^*=\frac{1+w-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, 其中表示 $\Delta=(\beta-(1+w))^2-4\alpha\gamma$, 则有 $|f'(z^*)|=|2\alpha z^*+\beta z_{ref}|=|1+a\pm\sqrt{\Delta}|$. 为了计算方便, 我们取正号, 并令 $\sqrt{\Delta}=\mu+j\nu$, 则有 $|f'(z^*)|=|1+w+\mu+j\nu|=\sqrt{(1+w+\mu)^2+\nu^2}$. 由于 z^* 是稳定的不动平面, 由引理 3.1 知

$$|f'((1+a)z^*)|\leq\begin{cases}\frac{a-1}{1+a}, & a<-1;\\ \frac{1-a}{1+a}, & -1<a<0;\\ 1, & a\geq 0.\end{cases} \tag{3.3.7}$$

又由 (3.3.7) 得, 当 $a<-1$ 时, $\frac{1-a}{1+a}<\sqrt{(1+a+\mu)^2+\nu^2}<\frac{a-1}{1+a}$, 有

$$\begin{cases}\frac{1-a}{1+a}-a-1<\mu<\frac{a-1}{1+a}-1-a,\\ \frac{1-a}{1+a}<\nu<\frac{a-1}{1+a}.\end{cases} \tag{3.3.8}$$

当 $-1<a<0$ 时, $\frac{a-1}{1+w}<\sqrt{(1+a+\mu)^2+\nu^2}<\frac{1-a}{1+a}$, 有

$$\begin{cases}\frac{a-1}{1+a}-a-1<\mu<\frac{1-a}{1+a}-1-a,\\ \frac{a-1}{1+a}<\mu<\frac{a-1}{1+a}.\end{cases} \tag{3.3.9}$$

当 $w\geq 0$ 时, $\sqrt{(1+a+\mu)^2+\nu^2}<1$, 有

$$\begin{cases}-2-a<\mu<-b,\\ -1<\nu<1.\end{cases} \tag{3.3.10}$$

又

$$\begin{aligned}\triangle &= \mu^2-\nu^2+2\mu\nu j=[\beta-(1+a)]^2-4\alpha\gamma\\ &= [((1+a)k-w_{00})^2+4(1+a)(1+a+w_{00})k]z_{ref}^2-2(1+a)((1+a)k\\ &\quad -w_{00})z_{ref}+(1+a)^2-4(1+a)(1+a+w_{00}),\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

令 $w_{00}=k(1+a)$, 那么

$$\triangle = 4k(1+a)^2(1+a)z_{ref}^2+(1+a)^2-4(1+a)^2(1+k)c.$$

又

$$4k(1+a)^2(1+k)z_{ref}^2+(1+a)^2-4(1+a)^2(1+k)c=\mu^2-\nu^2+2\mu\nu j,$$

则

$$|4k(1+a)^2(1+k)z_{ref}^2|=|\mu^2-\nu^2+2\mu\nu j-(1+a)^2(1-4(1+k)c)|,$$

故

$$|z_{ref}^2|\le\frac{|\mu^2-\nu^2+2\mu\nu j|+|(1+a)^2(1-4(1+k)c)|}{|4k(1+k)(1+a)^2|}.$$

为了讨论问题的方便, 只考虑 $a\ge 0$ 的情况, 而 a 的其它情况也可以类似讨论. 由于

$$\begin{aligned}|\mu^2-\nu^2+2\mu\nu j| &= \sqrt{(\mu^2-\nu^2)^2+4\mu^2\nu^2}\\ &= \sqrt{\mu^4+\nu^4-2\mu^2\nu^2+4\mu^2\nu^2}\\ &= \mu^2+\nu^2\\ &< (2+a)^2+1,\end{aligned}$$

故

$$|z_{ref}^2|<\frac{(2+a)^2+1+|(1+a)^2(4(1+k)c-1)|}{4k(1+k)(1+a)^2}. \tag{3.3.12}$$

由不等式 (3.3.12) 知 z_{ref} 的范围依赖于 k, a 和 c. 例如, 当取 $c=-1$, $k=0.04$, $a=0.5$ 时, 则有 $|z_{ref}|<10$.

当 $w_{00}=k(1+a)$ 时, 有

$$(1+a)^2(1+k)z^2-(1+a)z+c-kz_{ref}^2=0.$$

考虑

$$|(1+a)^2(1+k)|z^2-(1+a)z-|c-kz_{ref}^2|=0, \tag{3.3.13}$$

则方程 (3.3.13) 有正根 T, 即

$$T=\frac{(1+a)+\sqrt{(1+a)^2+4(1+a)^2|1+k||c-kz_{ref}|}}{2|(1+a)^2(1+k)|}.$$

又由于

$$\begin{aligned} f(z) &= (1+a)^2(1+k)z^2+c-kz_{ref}^2 \\ &= (1+a)z, \end{aligned}$$

当 $|z|>T$, $(1+a)|z|>(1+a)T$, 有

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |(1+a)^2(1+k)z^2|-|c-kz_{ref}^2| \\ &\geq (\frac{|z|}{T})^2T(1+a)+|c-kz_{ref}^2|((\frac{|z|}{T})^2-1) \\ &> (1+a)(\frac{|z|}{T})^2T \\ &= [\frac{|z|}{T}(1+a)^{\frac{1}{2}}]^2T, \end{aligned}$$

因此

$$f^n(z)>(\frac{(1+a)^{\frac{1}{2}}|z|}{T})^{2^n}T\to\infty(n\to\infty),$$

即系统 (3.3.4) 的 Julia 集应限制在空间 $\{z:|z|\leq T\}$ 内.

下面通过 $J(f)=\partial S(z^*)=\partial S(\infty)$ 来讨论控制系统 (3.3.4) 的 Julia 集. C_0

表示曲面 $|z|=T$, 则 C_0 包含 $f(\cdot)$ 的稳定不动平面 z^*. 由于

$$f^{-1}(z)=(\frac{(1+w)z-|c-kz_{ref}^2|}{|1+k|(1+w)^2})^{\frac{1}{2}},$$

则有

$$|f^{-1}(C_0)|^2=|\{\frac{(1+w)Te^{i\theta}-|c-kz_{ref}^2|}{|1+k|(1+w)^2}:0\leq\theta\leq 2\pi\}|.$$

事实上,

$$|\frac{(1+w)Te^{i\theta}-|c-kz_{ref}^2|}{|1+k|(1+w)^2}|\leq\frac{|(1+w)Te^{i\theta}|+|c-kz_{ref}^2|}{|1+k|(1+w)^2}=|Te^{i\theta}|^2,\ 0\leq\theta\leq 2\pi,$$

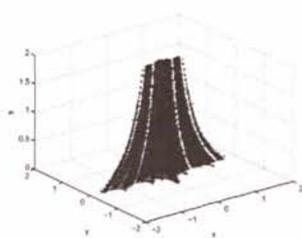
则

$$|f^{-1}(C_0)|\leq|Te^{i\theta}|=T,$$

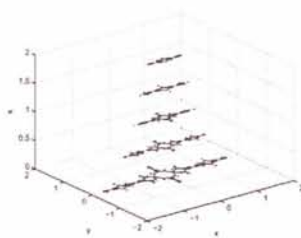
因此 $f^{-1}(C_0)\subset C_0$, 即 $f^{-1}(C_0)$ 包含于曲面 C_0 内. 令 $C_1=f^{-1}(C_0)$, 则 $C_1\subset C_0$. 对每个 θ, 设 $\varphi_1(\theta)$ 是从 C_0 上的点出发的轨线在 C_1 上的端点, 称从 C_0 上的点为起点垂直到达 C_1 的曲线为轨线. 设 S_1 是 C_0 与 C_1 之间的环形空间, 则 $f^{-1}(S_1)$ 为具有内边界 $C_2=f^{-1}(C_1)$ 和外边界 C_1 的环形空间 S_2, 则连接 C_0 与 C_1 的轨线的逆映象给出了一簇连接 C_1 和 C_2 的轨线. 设 $\varphi_2(\theta)$ 是从 C_1 上的点出发的轨线在 C_2 上的端点, 用相似的方法继续下去, 可以得到一个序列 C_l, $l=0,1,2,\cdots$, 满足 $C_{l+1}\subset C_l$ 所围的空间内, 并且对每个 l 连接 C_l 上点 $\varphi_l(\theta)$ 与 C_{l+1} 上点 $\varphi_{l+1}(\theta)$ 的轨线簇. 当 $l\to\infty$ 时, 曲面 C_l 逼近 z^* 的稳定空间的边界, 而这个边界正是空间 Julia 集 $J(f)$. 因为 $\{\varphi_l(\theta)\}_{l=1}^{\infty}$ 位于 C_0 内, 并且有界, 从而必存在收敛的子列 $\lim_{s\to\infty}\varphi_{l_s}^m(\theta)=\varphi^m(\theta)$, 而 $\varphi^m(\theta)$ 构成了控制系统 (3.3.4) 的空间混沌 Julia 集.

由于

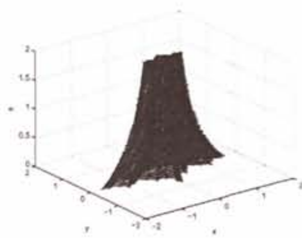
$$|f^{-1}(z)|^2 \;=\; |\frac{(1+a)Te^{i\theta}-|c-kz_{ref}^2|}{|1+k|(1+a)^2}|$$



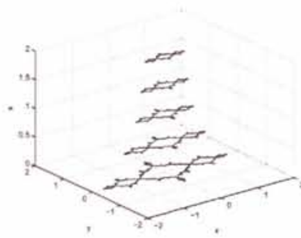
(a) $k=-0.04$ 时的空间混沌 Julia 集



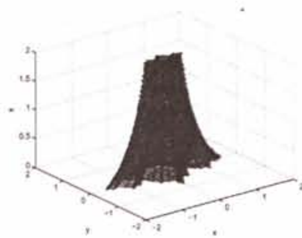
(b) 图 3.3(a)的截面图



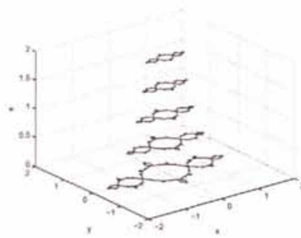
(c) $k=-0.02$ 时的空间混沌 Julia 集



(d) 图 3.3(c)的截面图



(e) $k=0$ 时的空间混沌 Julia 集



(f) 图 3.3(e)的截面图

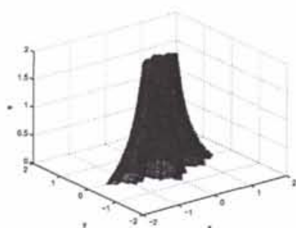
图 3.3: 当 $c=-1$ 时, 空间混沌 Julia 集受非正的参数 k 控制的情形.

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{|(1+a)Te^{i\theta}-|c+z_{ref}^2-(k+1)z_{ref}^2||}{|1+k|(1+a)^2}\\
&\le \frac{|(1+a)Te^{i\theta}|+|k+1|z_{ref}^2+|c+z_{ref}^2|}{|1+k|(1+a)^2}\\
&= \frac{z_{ref}^2}{(1+a)^2}+\frac{(1+a)T+|c+z_{ref}^2|}{|1+k|(1+a)^2},
\end{aligned}
$$

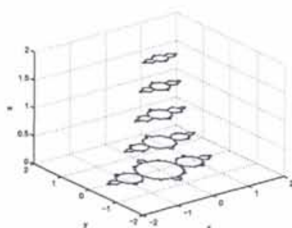
显然, 当 a 给定时, $f^{-1}(z)$ 随 $|1+k|$ 的增加而减小. 根据前面空间混沌 Julia 集构造的讨论过程, 系统 (3.3.4) 的空间混沌 Julia 集随着 $|1+k|$ 的变化而变化. 特别的, 当 $k>-1$ 时, 控制系统 (3.3.4) 的空间混沌 Julia 集随着 k 的增大而减小.

由于系统 (3.2.3) 中的 z, v 为复数, 取 $z=x+iy, v=s+it$, 并令

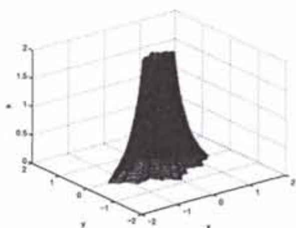
$(z, v) = (x, y, s, t)$, 其中 x, y, s, t 为实数. 由空间混沌 Julia 集的定义知系统 (3.2.1) 的空间混沌 Julia 集是一个 2^2 维的图形, 而不能用三维空间图形来表示. 为了画出其空间混沌 Julia 集, 可以固定四个实坐标中的一个, 用三维仿真图展示出空间混沌 Julia 集. 不妨取 $t = t_0$, 考虑空间混沌 Julia 集中形如 (x, y, s, t_0) 的点, 并在 R^3 中描述. 本部分中取 $t = 0$, 对空间混沌 Julia 集的控制进行三维仿真刻画.



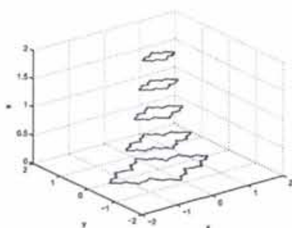
(a) $k = 0.02$ 时的空间混沌 Julia 集



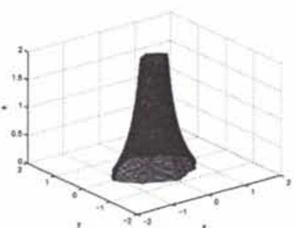
(b) 图 3.4(a)的截面图



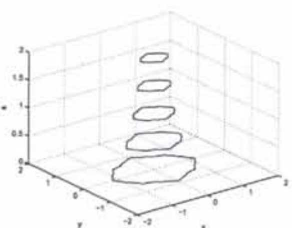
(c) $k = 0.04$ 时的空间混沌 Julia 集



(d) 图 3.4(c)的截面图



(e) $k = 0.08$ 时的空间混沌 Julia 集



(f) 图 3.4(e)的截面图

图 3.4: 当 $c = -1$ 时, 空间混沌 Julia 集受正的参数 k 控制的情形.

当参数 $c = -1$ 时, 控制系统 (3.3.4) 的空间混沌 Julia 集随控制参数 k 的控制如图 3.3 和 3.4 所示.

另外, 固定 $x = x_0$ 或 $y = y_0$ 的情况, 也可以同样的讨论.

3.4 空间混沌 Julia 集的线性广义同步

基于一维平面 Julia 集的同步和广义同步的概念[59], 给出不同空间混沌 Julia 集的同步和广义同步的定义.

定义 3.4. 考虑空间混沌 Julia 集

$$z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = f(z_{m,n}, w_{m,n}; c_1, a), \tag{3.4.1}$$

$$w_{m+1,n} + aw_{m,n+1} = g(z_{m,n}, w_{m,n}; c_2, a), \tag{3.4.2}$$

其中 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 是非线性函数, 并且在系统 (3.4.1) 上引入耦合项 $p[z_{m,n}, w_{m,n}, c_2, a; \varepsilon]$, 则有

$$z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = f(z_{m,n}, w_{m,n}; c_1, a) + p[z_{m,n}, w_{m,n}, c_2, a; \varepsilon], \tag{3.4.3}$$

其中 p 是关于 $z_{m,n}, w_{m,n}, c_2, a$ 的耦合项, ε 是耦合强度, 并记 (3.4.1), (3.4.2), (3.4.3) 的 Julia 集分别为 J^1, J^2, J^3_ε.
如果空间混沌 Julia 集 J^3_ε 与 J^2 将变得相似或者一样, 即满足

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_0}(J^3_\varepsilon \cup J^2 - J^3_\varepsilon \cap J^2) = \emptyset, \tag{3.4.4}$$

则称系统 (3.4.2) 与 (3.4.3) 的空间混沌 Julia 集实现同步.
如果存在函数 φ, 使得空间混沌 Julia 集 J^3_ε 与 $\varphi(J^2)$ 将变得相似或者一样, 即满足

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_0}(J^3_\varepsilon \cup \varphi(J^2) - J^3_\varepsilon \cap \varphi(J^2)) = \emptyset, \tag{3.4.5}$$

则称系统 (3.4.2) 与 (3.4.3) 的空间混沌 Julia 集实现广义同步.

特别的, 当 $a = 0$, $n = 0$ 时, 空间混沌 Julia 集的同步和广义同步与一维(或者平面) Julia 集的同步和广义同步类似, 也可以说空间混沌 Julia 集的同步和广义同步是一维(或者平面) Julia 集的同步和广义同步的深入和推广.

3.4.1 空间混沌 Julia 集的线性广义同步的实现

取 $f(z_{m,n}, w_{m,n}; c_1, a) = (1+a)^2 z_{m,n}^2 + c_1$ 和 $g(z_{m,n}, w_{m,n}; c_2, a) = (1+a)^2 w_{m,n}^2 + c_2$, 则系统 (3.4.1) 和 (3.4.2) 有

$$z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = (1+a)^2 z_{m,n}^2 + c_1, \tag{3.4.6}$$

$$w_{m+1,n} + aw_{m,n+1} = (1+a)^2 w_{m,n}^2 + c_2, \tag{3.4.7}$$

其中 c_1, c_2 为复参数, 且 $c_1 \neq c_2$. 取 $p[z_{m,n}, w_{m,n}, c_2, a; \varepsilon] = \varepsilon[g(z_{m,n},\, w_{m,n})]^2$, 则系统 (3.4.3) 变为

$$z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = (1+a)^2 z_{m,n}^2 + c_1 + \varepsilon[g(z_{m,n},\, w_{m,n})]^2, \tag{3.4.8}$$

其中 ε 为耦合强度.

为了实现线性广义同步, 取线性反馈项

$$g(z_{m,n},\, w_{m,n}) = a_1 z_{m,n} - a_2 w_{m,n}. \tag{3.4.9}$$

令

$$e_{m,n} = h(z_{m,n}, w_{m,n}),$$

若能找到函数 $h(z_{m,n}, w_{m,n})$, $g(z_{m,n},\, w_{m,n})$, 使其 $e_{m+1,n}$, $e_{m,n+1}$ 和 $e_{m,n}$, 满足

$$e_{m+1,n} + ae_{m,n+1} \;=\; (1+a)^2 e_{m,n}^2 + c, \tag{3.4.10}$$

并且 $c \in \mathbf{D}_\tau$, $\tau = 1, 2$, 则系统 (3.4.6) 和 (3.4.7) 的空间混沌 Julia 集实现广义同步. 通常 c_1, c_2, ε, a 和 c 存在函数关系, 即 $c = \varphi(c_1,\, c_2,\, \varepsilon,\, a)$.

如果找到一个合适的 ε 使系统 (3.4.10) 的 $c \in \mathbf{D}_\tau$, $\tau = 1, 2$, 那么 $e_{m,n}$ 趋向于一个稳定不动平面 e^*. 我们有 $h(z_{m,n}, w_{m,n}) =$常数, 即 $z_{m,n}$ 和 $w_{m,n}$ 满足确定的函数关系, 则系统 (3.4.6) 和 (3.4.7) 的空间混沌 Julia 集实现广义同步.

为了简化计算, 只讨论 $a \geq 0$ 的条件下, 两个不同空间混沌 Julia 集的广义同步, 对于 $a < 0$ 且 $a \neq -1$ 的情况也可以类似讨论.

将函数 (3.4.9) 带入系统 (3.4.8), 有

$$z_{m+1,n} + a z_{m,n+1} = (1+a)^2 z_{m,n}^2 + c_1 + \varepsilon(a_1 z_{m,n} - a_2 w_{m,n})^2. \quad (3.4.11)$$

取 $h(z_{m,n}, w_{m,n}) = \alpha z_{m,n} + \beta w_{m,n}$, 并选择

$$e_{m,n} = \alpha z_{m,n} + \beta w_{m,n}, \quad (3.4.12)$$

则有

$$\begin{cases} e_{m+1,n} = \alpha z_{m+1,n} + \beta w_{m+1,n}, \\ e_{m,n+1} = \alpha z_{m,n+1} + \beta w_{m,n+1}, \end{cases}$$

然后有

$$\begin{aligned} e_{m+1,n} + a e_{m,n+1} &= \alpha z_{m+1,n} + \beta w_{m+1,n} + a(\alpha z_{m,n+1} + \beta w_{m,n+1}), \\ &= \alpha(z_{m+1,n} + a z_{m,n+1}) + \beta(w_{m+1,n} + a w_{m,n+1}). \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

将系统 (3.4.7) 和 (3.4.11) 代入误差方程 (3.4.13), 有

$$\begin{aligned} e_{m+1,n} + a e_{m,n+1} &= \alpha[(1+a)^2 z_{m,n}^2 + c_1 + \varepsilon(a_1 z_{m,n} - a_2 w_{m,n})^2] \\ &\quad + \beta[(1+a)^2 w_{m,n}^2 + c_2], \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

而

$$\begin{aligned} e_{m+1,n} + a e_{m,n+1} &= (1+a)^2 e_{m,n}^2 + c \\ &= (1+a)^2(\alpha z_{m,n} + \beta w_{m,n})^2 + c. \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

比较系统 (3.4.14) 和 (3.4.15) 对应项的系数, 有

$$\begin{cases} (1+a)^2\alpha^2 = \alpha(1+a)^2 + \alpha\varepsilon a_1^2, \\ -2\alpha\varepsilon a_1 a_2 = 2\alpha\beta(1+a)^2, \\ \alpha\varepsilon a_2^2 + \beta(1+a)^2 = (1+a)^2\beta^2, \\ \alpha c_1 + \beta c_2 = c, \end{cases} \tag{3.4.16}$$

从而有

$$\begin{cases} \alpha &= 1 + \frac{1}{(1+a)^2}\varepsilon a_1^2, \\ \beta &= -\frac{\varepsilon}{(1+a)^2}a_1 a_2, \\ c &= \frac{\varepsilon a_1}{(1+a)^2}(a_1 c_1 - a_2 c_2) + c_1. \\ a_1 &= a_2. \end{cases} \tag{3.4.17}$$

取 $a_1 = a_2 = 1$, 即 $g(z_{m,n}, w_{m,n}) = z_{m,n} - w_{m,n}$, 则有

$$z_{m+1,n} + az_{m,n+1} = (1+a)^2 z_{m,n}^2 + c_1 + \varepsilon[z_{m,n} - w_{m,n}]^2. \tag{3.4.18}$$

而 α, β, c 变为

$$\begin{cases} \alpha &= 1 + \frac{\varepsilon}{(1+a)^2}, \\ \beta &= -\frac{\varepsilon}{(1+a)^2}, \\ c &= \frac{\varepsilon}{(1+a)^2}(c_1 - c_2) + c_1. \end{cases} \tag{3.4.19}$$

只要 $c \in \mathbf{D}_1$, 误差系统 (3.4.10) 有稳定不动平面.

由 (3.4.17) 的第三个式子知

$$\varepsilon = \frac{(1+a)^2}{c_1 - c_2}(c - c_1). \tag{3.4.20}$$

注意到

$$\frac{(1+a)^2}{c_1 - c_2} = \frac{(1+a)^2}{|c_1 - c_2|}(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)),$$

其中 $\varphi = -\arctan(\frac{Im(c_1-c_2)}{Re(c_1-c_2)})$, 从而有

$$\varepsilon = \frac{(1+a)^2}{|c_1-c_2|}(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))(c-c_1). \tag{3.4.21}$$

由于 $\frac{(1+a)^2}{|c_1-c_2|}$ 是一个数量的伸缩倍数, 而 $\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)$ 是图形的一个旋转 φ 角度的变化, 因此由 $c \in \mathbf{D}_1$ 和 (3.4.20) 知, 耦合强度 ε 的稳定区域 $\mathbf{D}_1'$ 是由 $\mathbf{D}_1$ 向右移动 c_1 个单位后, 在大小上再变为 $\mathbf{D}_1$ 的 $\frac{(1+a)^2}{|c_1-c_2|}$倍, 然后顺时针旋转 φ 角度得到的. 如果取 $a=0.5$, $c_1=-1$, $c_2=-0.5+0.1i$, 则耦合强度 ε 的稳定区域 $\mathbf{D}_1'$ 如图 3.5 所示

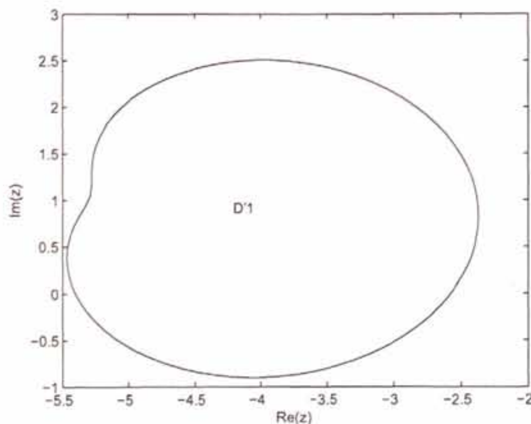


图 3.5: 当 $a \geq 0$ 时耦合强度 ε 的稳定区域 $\mathbf{D}_1'$.

将 (3.4.17) 确定的 α, β 代入 (3.4.12), 并令 $M = \frac{\varepsilon}{(1+a)^2}$, 则有 $e_{m,n} = (1+M)z_{m,n} - Mw_{m,n}$, 然后有

$$w_{m,n} = \frac{1+M}{M}z_{m,n} - \frac{1}{M}e_{m,n}.$$

将 $w_{m,n}$ 代入系统 (3.4.18), 有

$$\begin{aligned} z_{m+1,n} + az_{m,n+1} &= \frac{1+M}{M}(1+a)^2(z_{m,n} - \frac{e_{m,n}}{1+M})^2 \\ &+ \frac{(1+a)^2}{1+M}e_{m,n}^2 + c_1. \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

又由于

$$e_{m+1,n} + ae_{m,n+1} = (1+a)^2 e_{m,n}^2 + M(c_1 - c_2) + c_1,$$

从而有

$$\begin{aligned} & z_{m+1,n} + az_{m,n+1} \\ = & \frac{1+M}{M}(1+a)^2 (z_{m,n} - \frac{e_{m,n}}{1+M})^2 + \frac{1}{1+M}(e_{m+1,n} + ae_{m,n+1}) \\ - & \frac{M}{1+M}(c_1 - c_2) - \frac{1}{1+M}c_1 + c_1, \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

故

$$\begin{aligned} & z_{m+1,n} - \frac{1}{1+M}e_{m+1,n} + a(z_{m+1,n} - \frac{1}{1+M}e_{m+1,n}) \\ = & \frac{1+M}{M}(1+a)^2 (z_{m,n} - \frac{1}{1+M}e_{m,n})^2 \\ + & \frac{M}{1+M}c_2. \end{aligned} \tag{3.4.24}$$

令

$$W_{m,n} = z_{m,n} - \frac{1}{M+1}e_{m,n}, \tag{3.4.25}$$

有

$$\begin{cases} W_{m+1,n} = z_{m+1,n} - \frac{1}{M+1}e_{m+1,n}, \\ W_{m,n+1} = z_{m,n+1} - \frac{1}{M+1}e_{m,n+1}. \end{cases} \tag{3.4.26}$$

则系统 (3.4.24) 变为

$$W_{m+1,n} + aW_{m,n+1} = \frac{1+M}{M}(1+a)^2 W_{m,n}^2 + \frac{c_2}{(M+1)/M}. \tag{3.4.27}$$

如果 $e_{m,n}$ 有稳定不动平面 e^*, 则当 m, n 足够大时, 我们有

$$W_{m,n} \to z_{m,n} - \frac{1}{M+1}e^*. \tag{3.4.28}$$

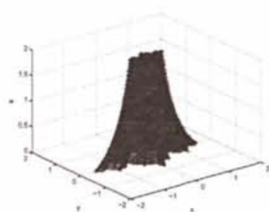
注意到 (3.4.27) 中复系数 $\frac{1+M}{M}$, 而

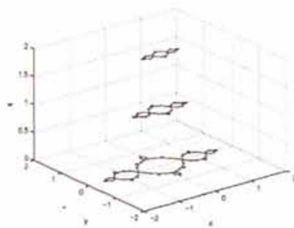
$$\frac{1+M}{M}=|\frac{1+M}{M}|(\cos(\theta)+i\sin(\theta)),$$

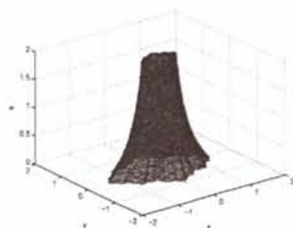
其中 $\theta=\arctan\frac{Im(\frac{1+M}{M})}{Re(\frac{1+M}{M})}$, 从而知 $|\frac{1+M}{M}|(1+a)^2$ 和 $\frac{1}{|(1+M)/M|}$ 是耦合系统 (3.4.27) 的伸缩倍数, 而 $\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ 表示此系统旋转 θ 度. 变换 (3.4.28) 使得耦合系统 (3.4.27) 的空间混沌 Julia 集只是位置上的变化, $|\frac{1+M}{M}|(1+a)^2$ 和 $\frac{1}{|(1+M)/M|}$ 使其空间混沌 Julia 集发生伸缩变化, 而 $\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ 使空间混沌 Julia 集旋转 θ 角度. 此时耦合系统的参数为

$$\frac{c_2}{(M+1)/M}. \tag{3.4.29}$$

注意到 (3.4.29) 中 c_2 是一个可以调控的参数值, 当 M, a 给定时, 调控参数 c_2 决定了空间混沌 Julia 集广义同步的实现. 另外, 由于所取 ε 可为复数值, 所得广义同步的空间混沌 Julia 集可能会出现旋转等刚性变化, 但这不会影响广义同步空间混沌 Julia 集的本质属性.


(a) $c_1=-1$ 时空间混沌 Julia 集


(b) 图 3.6(a)的截面图


(c) $c_2=-0.5+j0.1$ 时空间混沌 Julia 集.

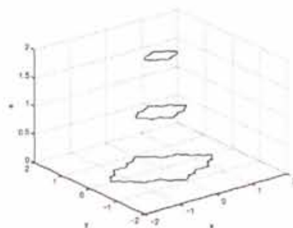

(d) 图 3.6(b)的截面图

图 3.6: 当 $a\geq 0$ 时, 系统 (3.4.6) 和 (3.4.7) 的空间混沌 Julia 集及截面图.

3.4.2 数值举例

分别取 $c_1=-1$, $c_2=-0.5+0.1i$, 则由定义 3.1 和引理 3.2 知系统 (3.4.6) 和 (3.4.7) 可以有初始点迭代生成空间混沌 Julia 集如图 3.6 所示. 对于误差系统 (3.4.10), 由于 $c\in\mathbf{D}_1$ 和 $a\geq 0$ 以及 $c=\frac{\varepsilon}{(1+a)^2}(c_1-c_2)+c_1$, 我们有

$$|\frac{\varepsilon}{(1+a)^2}(c_1-c_2)+c_1|<\frac{1}{1+a}.$$

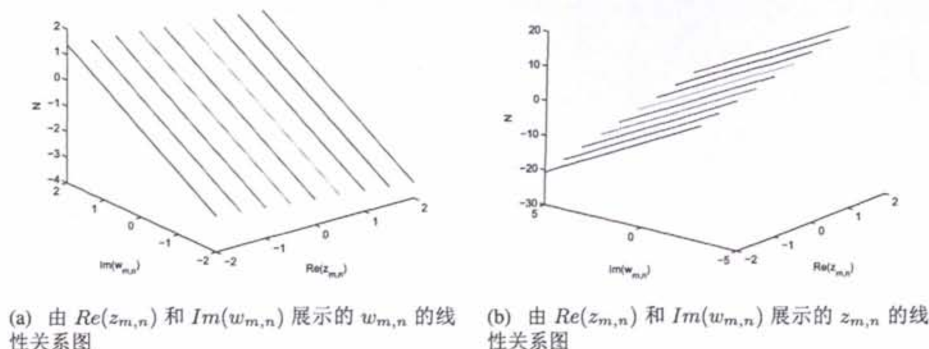
当取 $a=0.5$ 时, ε 满足

$$|\frac{\varepsilon}{(1+0.5)^2}(c_1-c_2)+c_1|<0.67,$$

因而 $z_{m,n}$ 和 $w_{m,n}$ 满足线性关系如图 3.7 所示. 当 $a=0.5$ 和 $\varepsilon=-2.5961+0.5193i$ 时, 根据上式的关系式, 我们可选择 $c=-0.4$, 因此有

$$e_{m+1,n}+0.5e_{m,n+1}=2.25e_{m,n}^2-0.4. \tag{3.4.30}$$

因为复参数 c 在稳定区域 $\mathbf{D}_1$ 内, 因此, $z_{m,n}$ 和 $w_{m,n}$ 实现广义同步如图 3.8 和

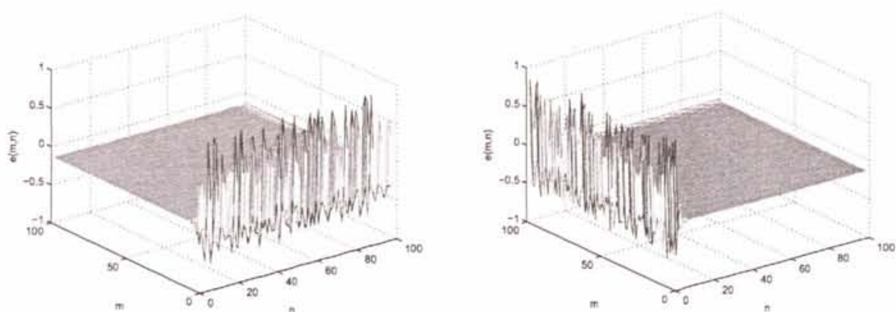


(a) 由 $Re(z_{m,n})$ 和 $Im(w_{m,n})$ 展示的 $w_{m,n}$ 的线性关系图

(b) 由 $Re(z_{m,n})$ 和 $Im(w_{m,n})$ 展示的 $z_{m,n}$ 的线性关系图

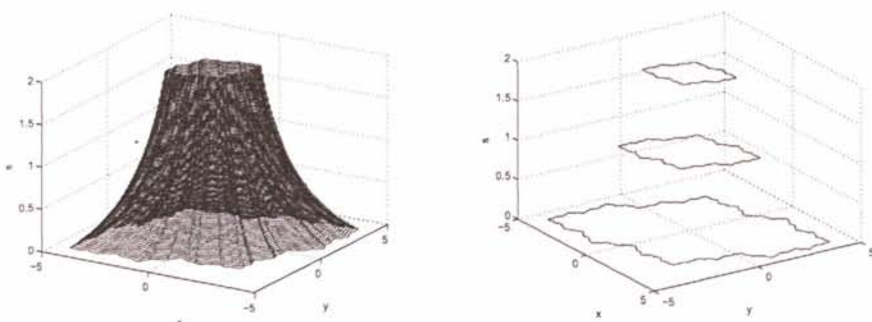
图 3.7: $z_{m,n}$ 和 $w_{m,n}$ 线性关系图.

3.9 所示. 图 3.8(a) 展示了随 m, n 的变化而展示 m 变化时, $e_{m,n}$ 的动力行为, 图 3.8(b) 展示了随 m, n 的变化而展示 n 变化时, $e_{m,n}$ 的动力行为. 由图 3.9 可以明显的看出, 空间混沌 Julia 集只发生了刚性变化, 本质特性没有改变. 而系



(a) m, n 的变化而展示 m 变化时, $e_{m,n}$ 的变化　　(b) m, n 的变化而展示 n 变化时, $e_{m,n}$ 的变化

图 3.8: $z_{m,n}$ 和 $w_{m,n}$ 达到广义同步.



(a) 系统 (3.4.6) 和 (3.4.7) 的空间混沌 Julia集同步的情况　　(b) 图 3.9(a)的空间混沌 Julia 集的截面图

图 3.9: 系统 (3.4.6) 和 (3.4.7) 的空间混沌 Julia集实现线性广义同步.

数 $\frac{M+1}{M}$ 是使耦合空间混沌 Julia 系统 (3.4.27) 的空间混沌 Julia 集发生伸缩和旋转变化, 其中 $M = \frac{\varepsilon}{(1+a)^2} = -1.1538 + j0.2308$, 当参数 a 给定时, M 随耦合系数 ε 的变化而变化.

3.4.3　线性广义同步与不动平面的关系

由定理 3.1 知系统 (3.4.30) 的不动平面为 $e_1^* \approx 0.87$, $e_2^* \approx -0.206$. 又由定理 2 知 $c \in \mathbf{D}_1$, 则系统 (3.4.30) 存在稳定的不动平面, 且不动平面 $e_2^* \approx -0.206$ 是稳定的. 根据上面的分析, 利用线性反馈的方法把误差系统 (3.4.30) 的空间混沌 Julia 集的点控制到稳定不动平面 e_2^* 上如图 3.10 所示.

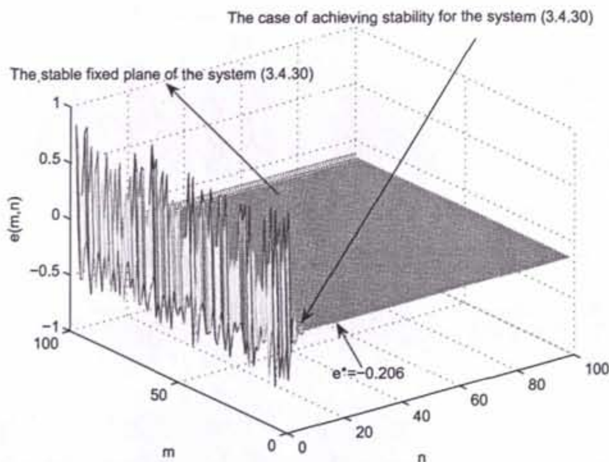


图 3.10: 系统 (3.4.30) 被控制到不动平面上.

3.5 空间混沌 Julia 集的非线性广义同步

3.5.1 空间混沌 Julia 集的非线性广义同步的实现

由前面的讨论知, 如果找到一个合适的 ε, 使系统 (3.4.10) 的 $c \in \mathbf{D}_\tau$, $\tau = 1, 2$, 那么 $e_{m,n}$ 趋向于稳定不动平面 $e^* = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2(1+a)}$. 由此知 $h(z_{m,n}, w_{m,n}) =$常数, 即, $z_{m,n}$ 和 $w_{m,n}$ 满足确定的函数关系, 则两个不同参数的空间混沌 Julia 集实现广义同步.

本部分也只讨论 $a \geq 0$ 的条件下, 两个不同参数的空间混沌 Julia 集实现非线性广义同步.

为了实现非线性广义同步, 取非线性反馈项

$$g(z_{m,n}, w_{m,n}) = a_1 z_{m,n} + a_2 w_{m,n}^2 + a_3, \tag{3.5.1}$$

则有

$$z_{m+1,n} + a z_{m,n+1} = (1+a)^2 z_{m,n}^2 + c_1 + \varepsilon(a_1 z_{m,n} + a_2 w_{m,n}^2 + a_3)^2 \tag{3.5.2}$$

为了使系统 (3.4.6) 和 (3.4.7) 的空间混沌 Julia 集实现非线性广义同步, 则

需要 $e_{m,n}$ 满足系统 (3.4.10), 因此需引入下列变换

$$e_{i,j} = \alpha z_{i,j} + \beta a^{j-n} w_{i,j}^2 + (2\beta a w_{m,n+1} w_{m+1,n} + 1)^{i-m} + \gamma - 1.$$

由变换知

$$\begin{cases} e_{m+1,n} = \alpha z_{m+1,n} + \beta w_{m+1,n}^2 + 2\beta a w_{m,n+1} w_{m+1,n} + \gamma, \\ e_{m,n+1} = \alpha z_{m,n+1} + \beta a w_{m,n+1}^2 + \gamma, \\ e_{m,n} = \alpha z_{m,n} + \beta w_{m,n}^2 + \gamma, \end{cases} \tag{3.5.3}$$

故有

$$\begin{aligned} & e_{m+1,n} + a e_{m,n+1} \\ = \ & \alpha z_{m+1,n} + \beta w_{m+1,n}^2 + 2\beta a w_{m,n+1} w_{m+1,n} + \gamma + a(\alpha z_{m,n+1} + \beta a w_{m,n+1}^2 + \gamma) \\ = \ & \alpha(z_{m+1,n} + a z_{m,n+1}) + \beta(w_{m+1,n} + a w_{m,n+1})^2 + (1+a)\gamma, \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

亦即

$$\begin{aligned} & e_{m+1,n} + a e_{m,n+1} \\ = \ & (1+a)^2 e_{m,n}^2 + c \\ = \ & (1+a)^2 (\alpha z_{m,n} + \beta w_{m,n}^2 + \gamma)^2 + c. \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

由 (3.5.4) 和 (3.5.5) 相等并比较对应项的系数, 我们有

$$\begin{cases} \alpha(1+a)^2 + \varepsilon\alpha a_1^2 = \alpha^2(1+a)^2, \\ \varepsilon\alpha a_2^2 + \beta(1+a)^4 = (1+a)^2\beta^2, \\ 2\varepsilon\alpha a_1 a_2 = 2(1+a)^2\alpha\beta, \\ 2\varepsilon\alpha a_1 a_3 = 2(1+a)^2\alpha\gamma, \\ 2\varepsilon\alpha a_2 a_3 + 2\beta c_2(1+a)^2 = 2(1+a)^2\beta\gamma, \\ \alpha c_1 + \beta c_2^2 + \alpha\varepsilon a_3^2 + \gamma(1+a) = (1+a)^2\gamma^2 + c, \end{cases} \tag{3.5.6}$$

然后有

$$\begin{cases} \alpha = 1 + \frac{\varepsilon}{(1+a)^2} a_1^2, \\ \beta = \frac{\varepsilon}{(1+a)^2} a_1 a_2, \\ \gamma = \frac{\varepsilon}{(1+a)^2} a_1 a_3, \\ c = \varepsilon a_3^2 + \frac{\varepsilon a_1^2}{(1+a)^2} c_1 + c_1 + \frac{\varepsilon a_1 a_2}{(1+a)^2} c_2^2 + \frac{\varepsilon}{1+a} a_1 a_3, \\ a_2 = -(1+a)^2 a_1, \\ a_3 = -a_1 c_2. \end{cases} \tag{3.5.7}$$

为了简化处理, 取 $a_1 = 1$, 则 $a_2 = -(1+a)^2$, $a_3 = -c_2$, 即非线性反馈项 $g(z_{m,n}, y_{m,n}) = z_{m,n} - (1+a)^2 w_{m,n}^2 - c_2$, 则含有非线性反馈项的空间混沌 Julia 系统 (3.5.2) 为

$$z_{m+1,n} + a z_{m,n+1} = (1+a)^2 z_{m,n}^2 + c_1 + \varepsilon[z_{m,n} - (1+a)^2 w_{m,n}^2 - c_2]^2, \tag{3.5.8}$$

且 α, β, γ 和 c 为

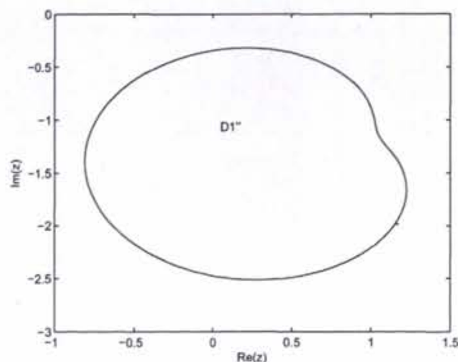


图 3.11: 当 $a \geq 0$ 时耦合强度 ε 的稳定区域 D_1''.

$$\begin{cases} \alpha = 1 + \frac{L}{(1+a)^2}, \\ \beta = -L, \\ \gamma = -\frac{L c_2}{(1+a)^2}, \\ c = c_1 + \frac{L}{(1+a)^2}(c_1 - (1+a)c_2). \end{cases} \tag{3.5.9}$$

因此, 要使 $e_{m,n}$ 满足系统 (3.4.10), 并保证有稳定的不动平面, 则需要 $c \in \mathbf{D}_1$. 由 (3.5.9) 的第四个式子知

$$\varepsilon = \frac{(1+a)^2}{c_1 - (1+a)c_2}(c - c_1). \tag{3.5.10}$$

注意到

$$\frac{(1+a)^2}{c_1 - (1+a)c_2} = \frac{(1+a)^2}{|c_1 - (1+a)c_2|}(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)),$$

其中 $\varphi = -\arctan(\frac{Im(c_1-(1+a)c_2)}{Re(c_1-(1+a)c_2)})$, 则 (3.5.10) 变为

$$\varepsilon = \frac{(1+a)^2}{|c_1 - (1+a)c_2|}(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))(c - c_1). \tag{3.5.11}$$

由于 $\frac{(1+a)^2}{|c_1-(1+a)c_2|}$ 是一个数量的伸缩倍数, 而 $\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ 是图形的一个旋转 φ 角度的变化式, 因此由 $c \in \mathbf{D}_1$ 和 (3.5.10) 知, 耦合强度 ε 的稳定区域 $\mathbf{D}_1''$ 是由 $\mathbf{D}_1$ 向右移动 c_1 个单位后, 在大小上再变为 $\mathbf{D}_1$ 的 $\frac{(1+a)^2}{|c_1-(1+a)c_2|}$ 倍, 然后顺时针旋转 φ 度得到的. 当取 $a = 0.5$, $c_1 = 0.5i$ 和 $c_2 = -0.5 + 0.5i$, 稳定区域 $\mathbf{D}_1''$ 如图 3.11 所示.

将 (3.5.9) 确定的 α, β 和 γ 代入 (3.5.3) 的第三个式子, 并令 $M = \frac{L}{(1+a)^2}$, 则有 $e_{m,n} = (1+M)z_{m,n} - M(1+a)^2 w_{m,n}^2 - Mc_2$, 即

$$w_{m,n}^2 = \frac{1+M}{M(1+a)^2} z_{m,n} - \frac{1}{M(1+a)^2} e_{m,n} - \frac{c_2}{(1+a)^2}.$$

将 $w_{m,n}^2$ 代入系统 (3.5.8), 有

$$\begin{aligned} z_{m+1,n} + az_{m,n+1} &= \frac{1+M}{M}(1+a)^2(z_{m,n} - \frac{e_{m,n}}{1+M})^2 + \frac{(1+a)^2}{1+M} e_{m,n}^2 \\ &\quad + c_1. \end{aligned} \tag{3.5.12}$$

又

$$e_{m+1,n} + ae_{m,n+1} = (1+a)^2 e_{m,n}^2 + M(c_1 - (1+a)c_2) + c_1,$$

从而有

$$\begin{aligned} z_{m+1,n}+az_{m,n+1} &= \frac{1+M}{M}(1+a)^2(z_{m,n}-\frac{e_{m,n}}{1+M})^2+\frac{1}{1+M}(e_{m+1,n}+ae_{m,n+1}) \\ &- \frac{M}{1+M}(c_1-(1+a)c_2)-\frac{1}{1+M}c_1+c_1, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & z_{m+1,n}-\frac{1}{1+M}e_{m+1,n}+a(z_{m+1,n}-\frac{1}{1+M}e_{m+1,n}) \\ &= \frac{1+M}{M}(1+a)^2(z_{m,n}-\frac{1}{1+M}e_{m,n})^2 \\ &+ \frac{M}{1+M}(1+a)c_2. \end{aligned} \tag{3.5.13}$$

令

$$W_{m,n}=z_{m,n}-\frac{1}{M+1}e_{m,n},$$

有

$$\begin{cases} W_{m+1,n}=z_{m+1,n}-\frac{1}{M+1}e_{m+1,n}, \\ W_{m,n+1}=z_{m,n+1}-\frac{1}{M+1}e_{m,n+1}, \end{cases}$$

然后有

$$W_{m+1,n}+aW_{m,n+1}=\frac{1+M}{M}(1+a)^2W_{m,n}^2+\frac{1+a}{(M+1)/M}c_2. \tag{3.5.14}$$

由 $e_{m,n}$ 有稳定不动平面 e^*, 则当 m, n 足够大时, 变量 $W_{m,n}$ 有

$$W_{m,n}\to z_{m,n}-\frac{1}{M+1}e^*. \tag{3.5.15}$$

注意到系统 (3.5.14) 中复系数 $\frac{1+M}{M}$, 并考虑

$$\frac{1+M}{M}=|\frac{1+M}{M}|(\cos(\theta)+i\sin(\theta)),$$

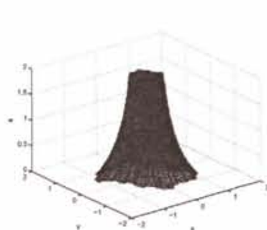
其中 $\theta = \arctan \frac{Im(\frac{1+M}{M})}{Re(\frac{1+M}{M})}$, 从而 $|\frac{1+M}{M}|(1+a)^2$ 和 $\frac{1+a}{|(1+M)/M|}$ 是耦合系统 (3.5.14) 的伸缩倍数, 而 $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ 是其旋转 θ 度的变化式. 变换 (3.5.15) 使耦合系统的空间混沌 Julia 集只是位置上的移动和旋转, $|\frac{M+1}{M}|(1+a)^2$ 和 $\frac{1+a}{|(1+M)/M|}$ 使得耦合系统的空间混沌 Julia 集发生伸缩变化, 而 $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ 使空间混沌 Julia 集旋转 θ 度. 而耦合系统的参数为

$$\frac{1+a}{(1+M)/M}c_2. \tag{3.5.16}$$

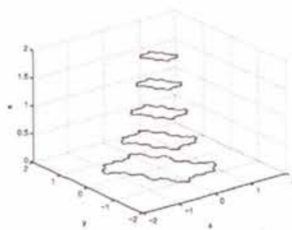
由于 c_2 是一个可以调控的参数值, 当 M, a 给定时, 调控耦合系统参数 c_2 决定了耦合系统的空间混沌 Julia 集. 由于所取 ε 可为复数值, 所得到的空间混沌 Julia 集可能会出现旋转等刚性变化, 但这不会影响耦合系统的空间混沌 Julia 集的本质特性.

3.5.2　数值举例

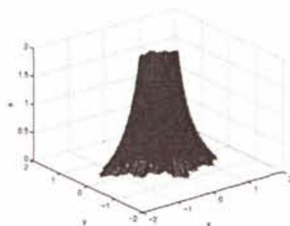
取 $c_1 = 0.5i$ 和 $c_2 = -0.5+0.5i$, 则空间混沌 Julia 集如图 3.12(a), (c) ($a \geq$



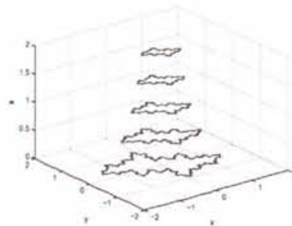
(a) 当 $c_1 = 0.5i$, $a \geq 0$ 时空间混沌 Julia 集



(b) 图 3.12(a) 的截面图



(c) 当 $c_2 = -0.5+0.5i$, $a \geq 0$ 时空间混沌 Julia 集



(d) 图 3.12(c) 的截面图

图 3.12: 系统 (3.4.6) 和 (3.4.7) 的空间混沌 Julia 集及其截面图.

0) 所示. 由于 $c \in \mathbf{D}_1$ 和 $a \geq 0$ 以及

$$c = c_1 + \frac{\varepsilon}{(1+a)^2}(c_1 - (1+a)c_2),$$

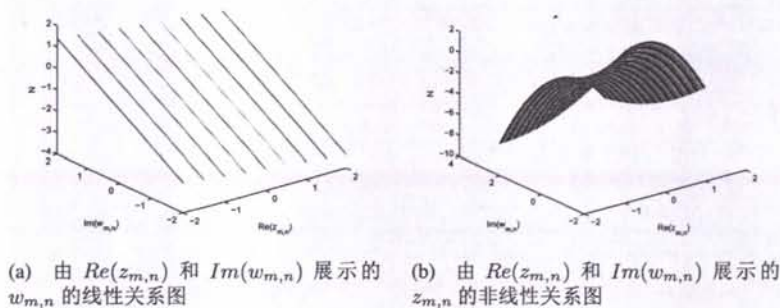
得

$$|c_1 + \frac{\varepsilon}{(1+a)^2}(c_1 - (1+a)c_2)| < \frac{1}{1+a}.$$

取 $a = 0.5$, 则 ε 满足

$$|c_1 + \frac{\varepsilon}{(1+0.5)^2}(c_1 - (1+0.5)c_2)| < 0.67,$$

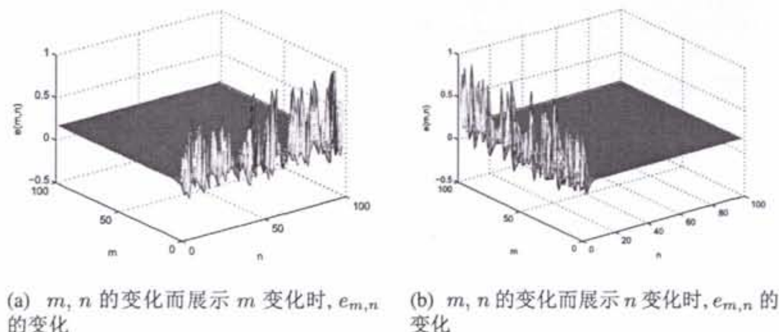
则 $z_{m,n}$ 和 $w_{m,n}$ 满足非线性关系如图 3.13 所示. 此时 $c = 0.2$ ($a = 0.5$, $L =$



(a) 由 $Re(z_{m,n})$ 和 $Im(w_{m,n})$ 展示的 $w_{m,n}$ 的线性关系图

(b) 由 $Re(z_{m,n})$ 和 $Im(w_{m,n})$ 展示的 $z_{m,n}$ 的非线性关系图

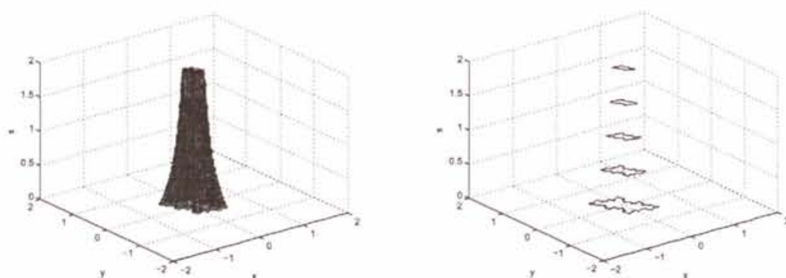
图 3.13: $z_{m,n}$ 和 $w_{m,n}$ 非线性关系图.



(a) m, n 的变化而展示 m 变化时, $e_{m,n}$ 的变化

(b) m, n 的变化而展示 n 变化时, $e_{m,n}$ 的变化

图 3.14: $z_{m,n}$ 和 $w_{m,n}$ 实现非线性广义同步.



(a) 系统 (3.4.6) 和 (3.4.7) 实现同步时的空间混沌 Julia 集　　(b) 图 3.15(a) 的截面图

图 3.15: 系统 (3.4.6) 和 (3.4.7) 实现非线性广义同步的情况.

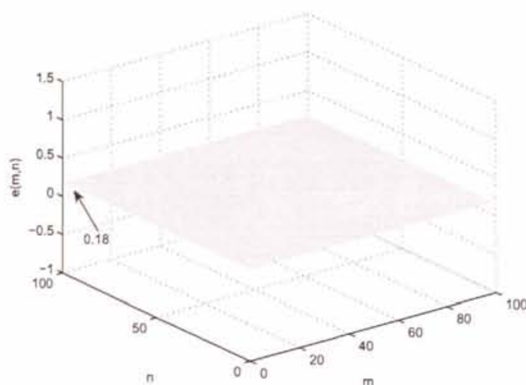


图 3.16: 系统 (3.5.17) 的稳定不动平面.

$0.99-1.17i$), 误差系统 (3.4.10) 变为

$$e_{m+1,n}+0.5e_{m,n+1}=2.25e_{m,n}^2+0.2, \tag{3.5.17}$$

因此 $z_{m,n}$ 和 $w_{m,n}$ 实现非线性广义同步(图 3.14 和 3.15). 图 3.14(a) 是 m, n 的变化而展示 m 变化时 $e_{m,n}$ 的动力行为. 图 3.14(b) 是 m, n 的变化而展示 n 变化时 $e_{m,n}$ 的动力行为. 由图 3.15 可见耦合系统 (3.5.14) 的空间混沌 Julia 集只是位置上的变化, 而系数 $\frac{M+1}{M}$ 是此空间混沌 Julia 集发生伸缩和旋转变化 (其中 $M=\frac{L}{(1+a)^2}=0.44-0.52i$, 当 a 给定时, M 随耦合强度 ε 的变化而变化).

另外, 固定 $x=x_0$ 或 $y=y_0$ 的情况, 也可以类似地讨论.

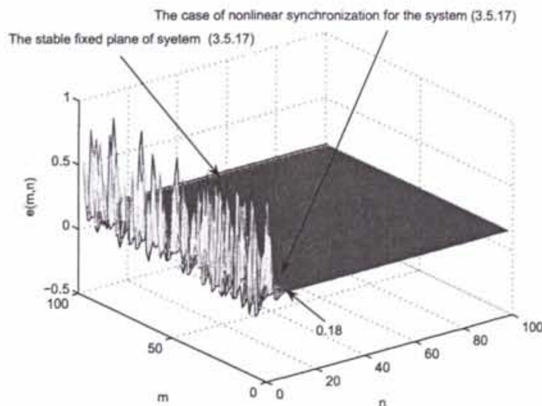


图 3.17: 系统 (3.5.17) 的空间混沌 Julia 集上的点被控制到不动平面上.

3.5.3 非线性广义同步与不动平面的关系

由定理 3.1 知误差系统 (3.5.17) 的不动平面为 $e_1^* = 0.48$, $e_2^* = 0.18$. 由定理 3.2 知 $c \in \mathbf{D}_1$, 则存在稳定的不动平面. 又由引理 3.1 知 e_2^* 为稳定不动平面如图 3.16 所示. 利用非线反馈控制方法把误差系统 (3.5.17) 的空间混沌 Julia 集的点控制到不动平面 $e_2^* = 0.18$ 上如图 3.17 所示.

3.6 小结

首先利用辅助参考控制的方法讨论了空间混沌 Julia 集的控制. 然后利用线性反馈与非线性反馈的方法以及构造多项式变换实现了两个不同参数的空间混沌 Julia 集的线性和非线性广义同步, 达到空间混沌 Julia 集根据目标控制的目的, 并给出了耦合强度 ε 的稳定区域. 仿真结果表明了该方法的有效性和可行性, 这一结果加深了 Julia 集在空间分形中的理论研究和应用. 这些方法已经成功应用到空间分形中, 对空间分形集的研究具有重要的意义. **本章部分内容已发表在国际杂志 International Journal of Bifurcation and Chaos 上.**

第四章　新的复类 Lorenz 系统的基本性质及其反同步

4.1　引言

前面几章研究了空间复迭代动力系统生成的分形集的控制与同步, 而分形和混沌是密不可分的非线性科学, 接下来的内容主要讨论混沌系统的同步. 目前所研究的混沌控制与同步, 大部分都局限在实动力系统范围内, 而混沌复系统的控制与同步的研究成果还比较少. 近几年, 在实动力系统中的混沌同步研究已经取得了丰富成果[60–68], 一些学者开始关注混沌复系统的控制与同步现象并展开研究[69–75]. 一般地, 我们可以把混沌复系统看作混沌系统的推广, 但是, 混沌复系统比混沌实系统具有更加复杂的性质, 有更广泛的应用价值. 目前对于混沌复系统同步的研究成果还相当少, 尤其对于不同结构混沌复系统反同步的研究几乎是空白. 在实际应用中, 特别是混沌复系统的同步用于保密通信时, 如果驱动系统与响应系统的状态是复变量, 可以增加通信时的安全性. 因此考虑不同结构混沌复系统的反同步问题具有重要的理论意义. 本章提出了一个新的复类 Lorenz 系统, 给出了它的基本性质, 并利用两种不同的方法分别讨论了新的复类 Lorenz 系统与两个不同混沌复系统的反同步问题.

4.2　新的复类 Lorenz 系统的构造

2006 年, Wang 等人在 Lorenz 系统的基础上, 提出了一个混沌系统[76]

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_1(x_1 - x_2), \\ \dot{x_2} = -c_1x_2 + x_1x_3, \\ \dot{x_3} = -b_1x_3 + d_1x_1x_2, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

其中, a_1, b_1, c_1 和 d_1 是常数. 而徐等人讨论了 (4.2.1) 的混沌控制和同步问题 [77, 78], 当 $a_1 = 20,\ b_1 = 2,\ c_1 = 28,\ d_1 = 1$ 时, 系统具有混沌特性. 注意到混沌系统 (4.2.1) 是 Lorenz 系统的变形, 也属于类 Lorenz 系统.

基于实混沌系统 (4.2.1), 我们构造如下的复混沌系统

$$\begin{cases} \dot{z_1} &= a_1(z_1 - z_2), \\ \dot{z_2} &= -c_1 z_2 + z_1 z_3, \\ \dot{z_3} &= -b_1 z_3 + \frac{1}{2} d_1(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2), \end{cases} \tag{4.2.2}$$

其中, $z_1 = z_1^r + j z_1^i = u_{11} + j u_{21}$ 和 $z_2 = z_2^r + j z_2^i = u_{31} + j u_{41}$ 是复变量, $z_3 = u_{51}$ 是实变量, 并且 $j = \sqrt{-1}$. $\dot{z}$ 表示变量 z 对时间 t 的微分, $\bar{z}$ 表示复变量 z 的共轭转置. 我们把混沌复系统 (4.2.2) 称之为新的复类 Lorenz 系统.

4.3 基本动态特性

分离系统 (4.2.2) 变量的实部和虚部, 则有

$$\begin{cases} \dot{u}_{11} &= a_1(u_{11} - u_{31}), \\ \dot{u}_{21} &= a_1(u_{21} - u_{41}), \\ \dot{u}_{31} &= -c_1 u_{31} + u_{11} u_{51}, \\ \dot{u}_{41} &= -c_1 u_{41} + u_{21} u_{51}, \\ \dot{u}_{51} &= -b_1 u_{51} + d_1 u_{11} u_{31} + d_1 u_{21} u_{41}. \end{cases} \tag{4.3.1}$$

而系统 (4.3.1) 有下面的基本性质

(1) 耗散性

系统 (4.3.1) 的散度表示为

$$\nabla F = \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial \dot{u}_{n1}}{\partial u_{n1}} = 2a_1 - b_1 - 2c_1, \ (n = 1, 2, 3, 4, 5).$$

当

$$2a_1 - b_1 - 2c_1 < 0 \tag{4.3.2}$$

时, 则系统 (4.3.1) 是耗散的, 并以指数形式 $\frac{dF}{dt}=e^{-(2c_1+b_1-2a_1)t}$ 收敛. 事实上, 初始体积为 $V(0)$ 的体积元, 在时刻 t 时初始体积元变为 $V(t)=V(0)e^{-(2c_1+b_1-2a_1)t}$. 即当 $t\to\infty$ 时, 包含系统 (4.3.1) 轨线的每个小体积元都以指数速率 $-(2c_1+b_1-2a_1)$ 收敛到零, 所有系统 (4.3.1) 的轨线最终会被限制在一个体积为零的极限子集上, 其运动将被固定在一个吸引子上, 这说明了系统 (4.3.1) 存在吸引子.

(2) 混沌特性和吸引子

系统 (4.3.1) 的线性化方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{u}'_{11} \\ \dot{u}'_{21} \\ \dot{u}'_{31} \\ \dot{u}'_{41} \\ \dot{u}'_{51} \end{pmatrix} = J_{nn}(u_{n1}; a_1,\, b_1,\, c_1,\, d_1) \begin{pmatrix} u'_{11} \\ u'_{21} \\ u'_{31} \\ u'_{41} \\ u'_{51} \end{pmatrix},\ n=1,\,2,\,3,\,4,\,5 \tag{4.3.3}$$

其中, $J_{nn}(u_{n1}; a_1,\, b_1,\, c_1,\, d_1)$ 是系统 (4.3.1) 的 Jacobian 矩阵

$$J_{nn} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & -a_1 & 0 \\ u_{51} & 0 & -c_1 & 0 & u_{11} \\ 0 & u_{51} & 0 & -c_1 & u_{21} \\ d_1u_{31} & d_1u_{41} & d_1u_{11} & d_1u_{21} & -b_1 \end{pmatrix}. \tag{4.3.4}$$

根据 Lyapunov 指数的定义[79], 则系统 (4.3.1) 的 Lyapunov 指数为

$$L_n = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\frac{\|u'_{n1}(t)\|}{\|u'_{n1}(0)\|},\ n=1,\,2,\,3,\,4,\,5. \tag{4.3.5}$$

当 $a_1=20,\ b_1=2,\ c_1=28,\ d_1=1$ 和初始值为 $(u_{11}(0),\ u_{21}(0),\ u_{31}(0),\ u_{41}(0),\ u_{51}(0))=(2,\ 1,\ -5,\ 3,\ 4)$ 时, 系统 (4.3.1) 的 Lyapunov 指数为 $\lambda_1=2.22,\ \lambda_2=\lambda_3=0,\ \lambda_4=-8.05$ 和 $\lambda_5=-12.67$. 显然, 对于这些取定的参数, 系统 (4.3.1)

存在正的 Lyapunov 指数, 故系统 (4.2.2) 是混沌的, 不同投影面和投影空间的混沌吸引子如图 4.1 所示.

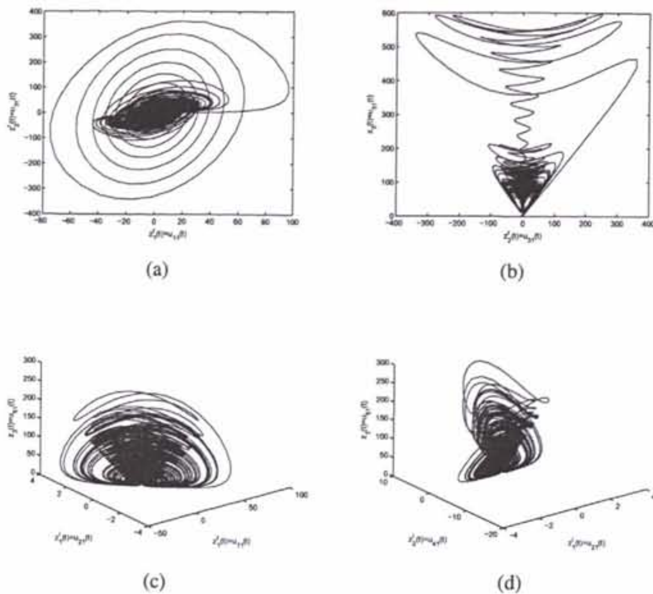


图 4.1: 系统 (4.3.1) 的混沌特性和混沌吸引子.

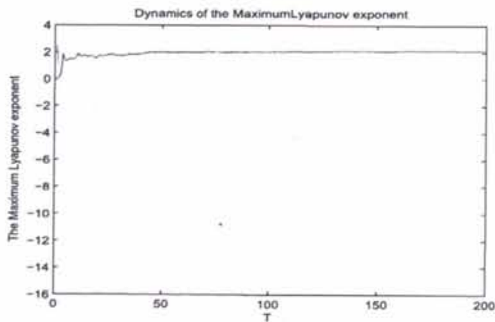


图 4.2: 图 4.1 混沌吸引子的最大 Lyapunov 指数.

根据最大 Lyapunov 公式[79]

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|\delta U(t)\|}{\|\delta U(0)\|}, \tag{4.3.6}$$

计算出图 4.1 的混沌吸引子的最大 Lyapunov 指数, 如图 4.2 所示, 可见系统 (4.2.2) 的最大 Lyapunov 指数是大于零的, 这就意味着系统 (4.2.2) 存在混沌吸

引子, 且系统 (4.2.2) 的运动轨迹是混沌的.

(3) 平衡点及其稳定性

如果取 $\dot{u}_{n1}=0,\ n=1,\ 2,\ \cdots,\ 5$, 则可得到系统 (4.3.1) 的不动点. 特别地取 $u_{11}=u_{21}$, 则有

$$\begin{aligned} E_1 &= (0,0,0,0,0), \\ E_{2,3} &= (\pm\frac{b_1c_1}{2d_1},\pm\frac{b_1c_1}{2d_1},\pm\frac{b_1c_1}{2d_1},\pm\frac{b_1c_1}{2d_1},c_1), \\ E_{4,5} &= (\mp\frac{b_1c_1}{2d_1},\mp\frac{b_1c_1}{2d_1},\mp\frac{b_1c_1}{2d_1},\mp\frac{b_1c_1}{2d_1},-c_1). \end{aligned}$$

系统 (4.3.1) 线性化后的系统在 E_0 处的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=a_1,\ \lambda_3=\lambda_4=-c_1,\ \lambda_5=-b_1$. 由线性系统理论知, 当且仅当系统在不动点处的特征值都具有负实部时, 不动点是稳定的. 因此当 $a_1<0,\ b_1>0$ 并且 $c_1>0$ 时, 不动点 E_1 是稳定的. 否则, 是不稳定的. 不动点 $E_{2,3}$ 和 $E_{4,5}$ 也可以类似的讨论其稳定性, 这里不再赘述.

(4) 对称性

对系统 (4.3.1) 引入下列变换 $(u_{11},\ u_{21},\ u_{31},\ u_{41},\ u_{51})\to(-u_{11},\ -u_{21},\ -u_{31},\ -u_{41},\ u_{51})$, 而系统 (4.3.1) 保持不变, 则系统 (4.3.1) 关于 u_{51}- 轴呈现对称性, 特别地这种对称性对所有的参数 $a_1,\ b_1,\ c_1$ 和 d_1 均成立. 图 4.1(*b*-*d*) 也说明了系统 (4.3.1) 关于 u_{51}-轴呈现对称行为.

4.4 新的复类 Lorenz 系统反同步的实现

考虑驱动-响应混沌复系统

$$\dot{Z} = f(Z,t) \tag{4.4.1}$$

和

$$\dot{W} = g(W,t)+I(t,\ Z,\ W), \tag{4.4.2}$$

其中, $Z=[z_1, z_2, \cdots, z_n]^T$ 与 $W=[w_1, w_2, \cdots, w_n]^T$ 为系统的复状态向量. 而

$$\begin{cases} z_1 &= u_{11}+ju_{21}, \\ z_2 &= u_{31}+ju_{41}, \\ \cdots \\ z_n &= u_{(2n-1)1}+ju_{(2n)1} \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} w_1 &= u_{12}+ju_{22}, \\ w_2 &= u_{32}+ju_{42}, \\ \cdots \\ w_n &= u_{(2n-1)2}+ju_{(2n)2} \end{cases}$$

是复变量组, $I(t, Z, W)=I_{(2n-1)}(t, u_{1m}, u_{3m}, \cdots, u_{(2n-1)m})+jI_{2n}(t, u_{2m}, u_{4m}, \cdots, u_{(2n)m})$, $m=1, 2$ 是复变量形式的控制输入, $f(Z,t)$ 与 $g(W,t)$ 为复变量关于 t 的非线性函数. 混沌复系统 (4.4.1) 为驱动系统, 混沌复系统 (4.4.2) 为响应系统.

分离混沌复系统 (4.4.1) 和 (4.4.2) 的实部和虚部, 则有

$$\begin{cases} \dot{u}_1^r &= f^r(u_1^r, t), \\ \dot{u}_1^i &= f^i(u_1^i, t), \end{cases} \tag{4.4.3}$$

和

$$\begin{cases} \dot{u}_2^r &= g^r(u_2^r, t)+I^r(t, u_1^r, u_2^r), \\ \dot{u}_2^i &= g^i(u_2^i, t)+I^i(t, u_1^i, u_2^i), \end{cases} \tag{4.4.4}$$

其中, u_1^r 和 u_2^r 分别表示复向量 Z 和 W 的实部, u_1^i 和 u_2^i 分别表示复向量 Z 和 W 的虚部, $I^r(t, u_1^r, u_2^r)$ 和 $I^i(t, u_1^i, u_2^i)$ 分别表示控制输入的实部和虚部, 上标 r 表示变量的实部, i 表示变量的虚部.

令驱动系统 (4.4.1) 与响应系统 (4.4.2) 的反同步误差为 $s = s^r + js^i = Z + W$, 则误差系统为

$$\dot{s} = \dot{Z} + \dot{W} = f(Z,t) + g(W,t) + I(t,\ Z,\ W); \tag{4.4.5}$$

分离其实部与虚部, 则有

$$\begin{cases} \dot{s}^r &= f^r(u_1^r,t) + g^r(u_2^r,t) + I^r(t,u_1^r,u_2^r), \\ \dot{s}^i &= f^i(u_1^i,t) + g^i(u_2^i,t) + I^i(t,u_1^i,u_2^i). \end{cases} \tag{4.4.6}$$

定义 4.1. 对于混沌复系统 (4.4.1) 和 (4.4.2) 的实虚部分离形式 (4.4.3) 和 (4.4.4), 若存在控制输入 $I^r(t,u_1^r,u_2^r)$ 和 $I^i(t,u_1^i,u_2^i)$, 在任意初始状态 $(u_1^r(0),\ u_2^r(0),\ u_1^i(0),\ u_2^i(0))$ 下, 均有

$$\lim_{t\to\infty}\|s^r(t)\|^2 = \lim_{t\to\infty}\|u_1^r(t,\ u_1^r(0)) + u_2^r(t,\ u_2^r(0))\|^2 = 0, \tag{4.4.7}$$

$$\lim_{t\to\infty}\|s^i(t)\|^2 = \lim_{t\to\infty}\|u_1^i(t,\ u_1^i(0)) + u_2^i(t,\ u_2^i(0))\|^2 = 0 \tag{4.4.8}$$

成立, 即

$$\lim_{t\to\infty}\|s(t)\| = \lim_{t\to\infty}\sqrt{\|s^r(t)\|^2 + \lim_{t\to\infty}\|s^i(t)\|^2} = 0$$

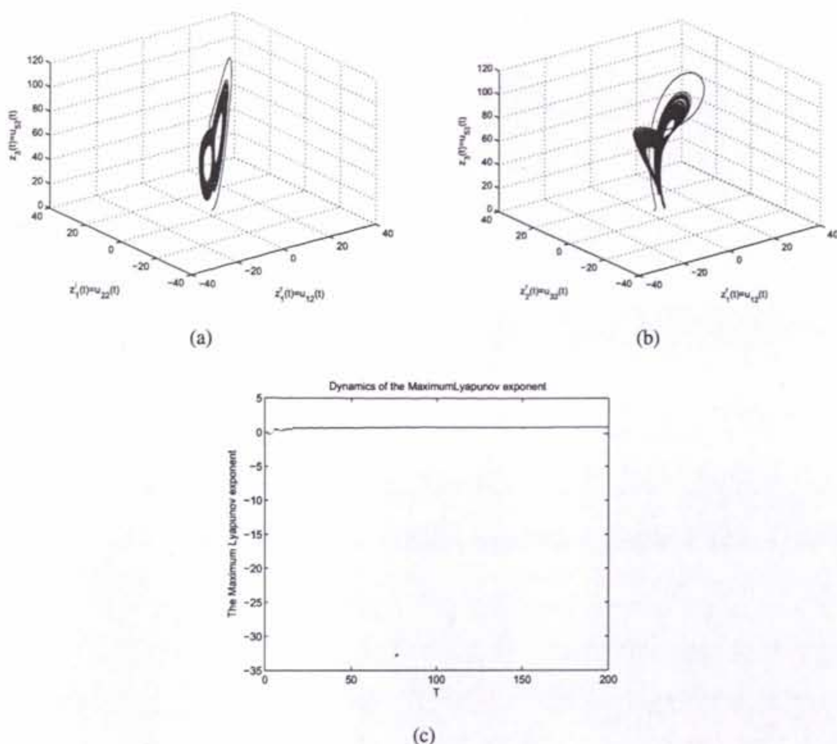
成立, 则混沌复系统 (4.4.1) 和 (4.4.2) 实现反同步.

下面利用主动控制方法和反馈控制方法分别实现新的复类 Lorenz 系统和复 Lorenz 系统以及复 $L\ddot{u}$ 系统和新的复类 Lorenz 系统的反同步.

4.4.1 主动控制方法

1983 年, Fowler 等人[73] 研究了复 Lorenz 系统

$$\begin{cases} \dot{w}_1 &= a_2(w_2 - w_1), \\ \dot{w}_2 &= c_2w_1 - w_1w_3 - w_2, \\ \dot{w}_3 &= -b_2w_3 + \frac{1}{2}(\bar{w}_1w_2 + w_1\bar{w}_2), \end{cases} \tag{4.4.9}$$



(a) (b) (c)

图 4.3: 复 Lorenz 系统在不同投影空间的混沌吸引子和它的最大 Lyapunov 指数.

其中, a_2, b_2 和 c_2 为正常数, $w_1 = w_1^r + jw_1^i = u_{12} + ju_{22}$ 和 $w_2 = w_2^r + jw_2^i = u_{32} + ju_{42}$ 是复变量, $w_3 = u_{52}$ 是实变量. 分离复 Lorenz 系统 (4.4.9) 的实部和虚部, 得到与复 Lorenz 系统等价的实系统为

$$\begin{cases} \dot{u}_{12} &= a_2(u_{32} - u_{12}), \\ \dot{u}_{22} &= a_2(u_{42} - u_{22}), \\ \dot{u}_{32} &= -c_2u_{12} + u_{12}u_{52}, \\ \dot{u}_{42} &= -c_2u_{22} + u_{22}u_{52}, \\ \dot{u}_{52} &= -b_2u_{52} + u_{12}u_{32} + u_{22}u_{42}. \end{cases} \tag{4.4.10}$$

当 $a_2 = 35, b_2 = 8/3, c_2 = 55$ 和初始值 $t_0 = 0$; $u_{12}(0) = 1$, $u_{22}(0) = 2$, $u_{32}(0) = 5$, $u_{42}(0) = 4$ 和 $u_{52}(0) = 3$ 时, 复 Lorenz 系统的混沌吸引子及其最大 Lyapunov 指数如图 4.3 所示.

令新的复类 Lorenz 系统 (4.2.2) 为响应系统, 有

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= a_1(z_1 - z_2) + I_1^r + jI_2^i, \\ \dot{z}_2 &= -c_1 z_2 + z_1 z_3 + I_3^r + jI_4^i, \\ \dot{z}_3 &= -b_1 z_3 + \frac{1}{2}d_1(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) + I_5, \end{cases} \tag{4.4.11}$$

其中, $I_1^r + jI_2^i$ 和 $I_3^r + jI_4^i$ 是复变量的控制输入, I_5 是实变量的控制输入. 新的复类 Lorenz 系统 (4.4.11) 的实变量形式为

$$\begin{cases} \dot{u}_{11} &= a_1(u_{11} - u_{31}) + I_1^r, \\ \dot{u}_{21} &= a_1(u_{21} - u_{41}) + I_2^i, \\ \dot{u}_{31} &= -c_1 u_{31} + u_{11}u_{51} + I_3^r, \\ \dot{u}_{41} &= -c_1 u_{41} + u_{21}u_{51} + I_4^i, \\ \dot{u}_{51} &= -b_1 u_{51} + d_1(u_{11}u_{31} + u_{21}u_{41}) + I_5. \end{cases} \tag{4.4.12}$$

根据反同步误差定义, 有

$$\begin{cases} \dot{s}_1^r &= -a_2 s_1^r - a_1 s_3^r + (a_1 + a_2)(u_{11} + u_{32}) + I_1^r, \\ \dot{s}_2^i &= -a_2 s_2^i - a_1 s_4^i + (a_1 + a_2)(u_{21} + u_{42}) + I_2^i, \\ \dot{s}_3^r &= -c_1 s_3^r - u_{52}s_1^r + u_{11}s_5 + c_2 u_{12} + (c_1 - 1)u_{32} + I_3^r, \\ \dot{s}_4^i &= -c_1 s_4^i - u_{52}s_2^i + u_{21}s_5 + c_2 u_{22} + (c_1 - 1)u_{42} + I_4^i, \\ \dot{s}_5 &= -b_1 s_5 + d_1(s_1^r u_{31} + s_4^i u_{21}) + s_2^i u_{42} + s^r(3)u_{12} + (b_1 - b_2)u_{52} \\ & \quad - (d_1 + 1)(u_{12}u_{31} + u_{21}u_{42}) + I_5. \end{cases} \tag{4.4.13}$$

选 Lyapunov 函数为

$$V(t) = \frac{1}{2}[(s_1^r)^2 + (s_2^i)^2 + (s_3^r)^2 + (s_4^i)^2 + (s_5)^2],$$

对 $V(t)$ 求导, 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{s}_1^r s_1^r + \dot{s}_2^i s_2^i + \dot{s}_3^r s_3^r + \dot{s}_4^i s_4^i + \dot{s}_5 s_5 \\ &= [-a_2 s_1^r - a_1 s_3^r + (a_1 + a_2)(u_{11} + u_{32}) + I_1^r]s_1^r + [-a_2 s_2^i - a_1 s_4^i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(a_1+a_2)(u_{21}+u_{42})+I_2^i]s_2^i+[-c_1s_3^r-u_{52}s_1^r+u_{11}s_5+c_2u_{12}\\
&+(c_1-1)u_{32}+I_3^r]s_3^r+[-c_1s_4^i-u_{52}s_2^i+u_{21}s_5+c_2u_{22}\\
&+(c_1-1)u_{42}+I_4^i]s_4^i+[-b_1s_5+d_1(s_1^ru_{31}+s_4^iu_{21})+s_2^iu_{42}\\
&+s_3^ru_{12}+(b_1-b_2)u_{52}-(d_1+1)(u_{12}u_{31}+u_{21}u_{42})+I_5]s_5. \quad (4.4.14)
\end{aligned}
$$

设计控制器为

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
I_1^r &=& a_1s_3^r-(a_1+a_2)(u_{11}+u_{32}),\\
I_2^i &=& a_1s_4^i-(a_1+a_2)(u_{21}+u_{42}),\\
I_3^r &=& u_{52}s_1^r-u_{11}s_5-c_2u_{12}-(c_1-1)u_{32},\\
I_4^i &=& u_{52}s_2^i-u_{21}s_5-c_2u_{22}-(c_1-1)u_{42},\\
I_5 &=& -d_1(s_1^ru_{31}+s_4^iu_{21})-s_2^iu_{42}-s_3^ru_{12}-(b_1-b_2)u_{52}\\
& & +(d_1+1)(u_{12}u_{31}+u_{21}u_{42}),
\end{array}
\right. \quad (4.4.15)
$$

则方程 (4.4.14) 有

$$
\dot{V}(t)=-[a_2(s_1^r)^2+a_2(s_2^i)^2+c_1(s_3^r)^2+c_1(s_4^i)^2+b_1(s_5)^2]<0. \quad (4.4.16)
$$

由于 $V(t)$ 是正定的函数, 而 $\dot{V}(t)$ 是负定的. 根据 Lyapunov 稳定性理论可知, 系统 (4.4.13) 的平衡点 ($s_1^r=0,\ s_2^i=0,\ s_3^r=0,\ s_4^i=0,\ s_5=0$) 是渐近稳定的, 即

$$
\lim_{t\to\infty}\|s(t)\|=\sqrt{\lim_{t\to\infty}\|(s_1^r(t))^2+(s_3^r(t))^2+(s_5(t))^2\|+\|(s_1^i(t))^2+(s_3^i(t))^2\|}=0,
$$

那么系统 (4.2.3) 和 (4.4.12) 实现反同步, 也就是说新的复类 Lorenz 系统 (4.2.2) 和混沌复 Lorenz 系统 (4.4.11) 实现了反同步.

采用四阶 Runge-Kutta 法求解系统 (4.4.10) 和 (4.4.12), 并选取系统参数为 $a_1=20,\ b_1=2,\ c_1=28,\ d_1=1$ 和 $a_2=1,\ b_2=2,\ c_2=10$. 取初始条件为 $u_{11}(0)=2,\ u_{21}(0)=1,\ u_{31}(0)=-5,\ u_{41}(0)=3,\ u_{51}(0)=4$ 和 $u_{12}(0)=4,\ u_{22}(0)=1,\ u_{32}(0)=-5,\ u_{42}(0)=2,\ u_{52}(0)=0.5$, 根据反同步误差的定义, 得误差系统 (4.4.13) 的初始值为 $s_1^r(0)=6,\ s_2^i(0)=2,\ s_3^r(0)=$

-10, $s_4^i(0) = 5$, $s_5(0) = 4.5$.

系统 (4.2.3) 和 (4.4.12) 的反同步情形如图 4.4 所示, 可见新的复类 Lorenz 系统 (4.2.2) 和复 Lorenz 系统 (4.4.11) 的实部与虚部的时间响应分别实现了反同步. 由反同步误差图 4.5 可知, 当 $t \to \infty$ 时 $s_1^r(t)$, $s_2^i(t)$, $s_3^r(t)$, $s_4^i(t)$ 和 $s_5(t)$ 分别精确地稳定在零点, 即新的复类 Lorenz 系统 (4.2.2) 和复 Lorenz 系统 (4.4.11) 达到了精确的反同步.

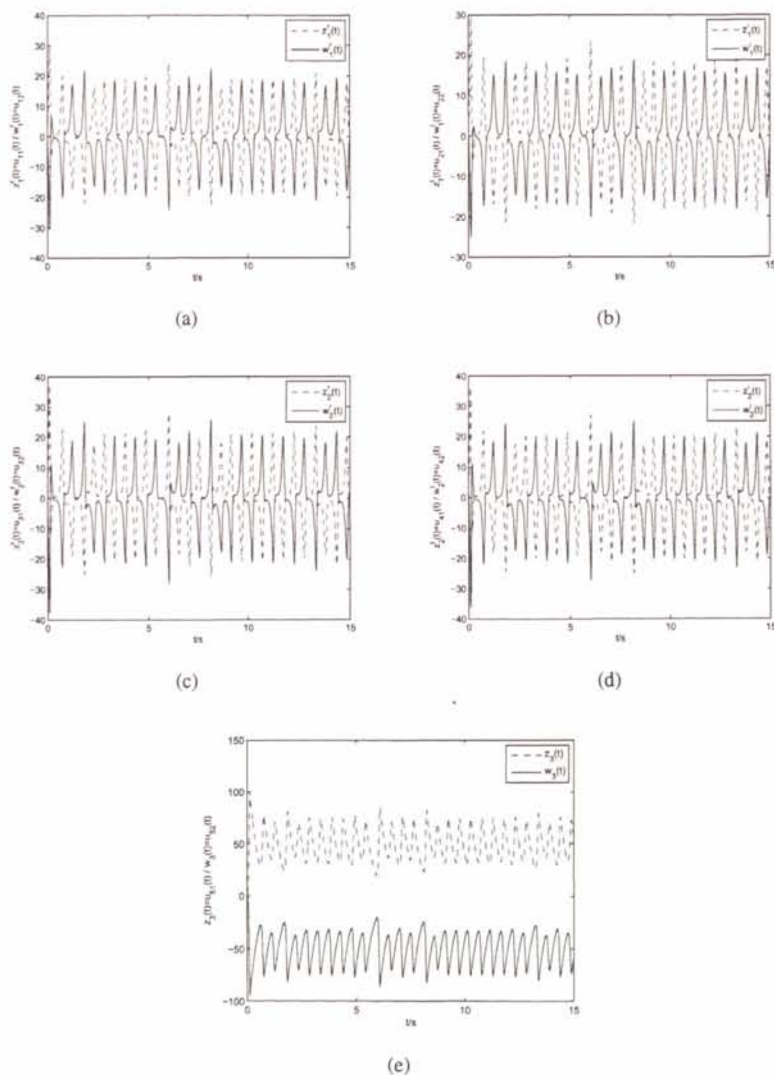


图 4.4: 在主动控制器 (4.4.15) 的控制下, 新的复类 Lorenz 系统 (4.2.2) 和复 Lorenz 系统 (4.4.9) 实现反同步.

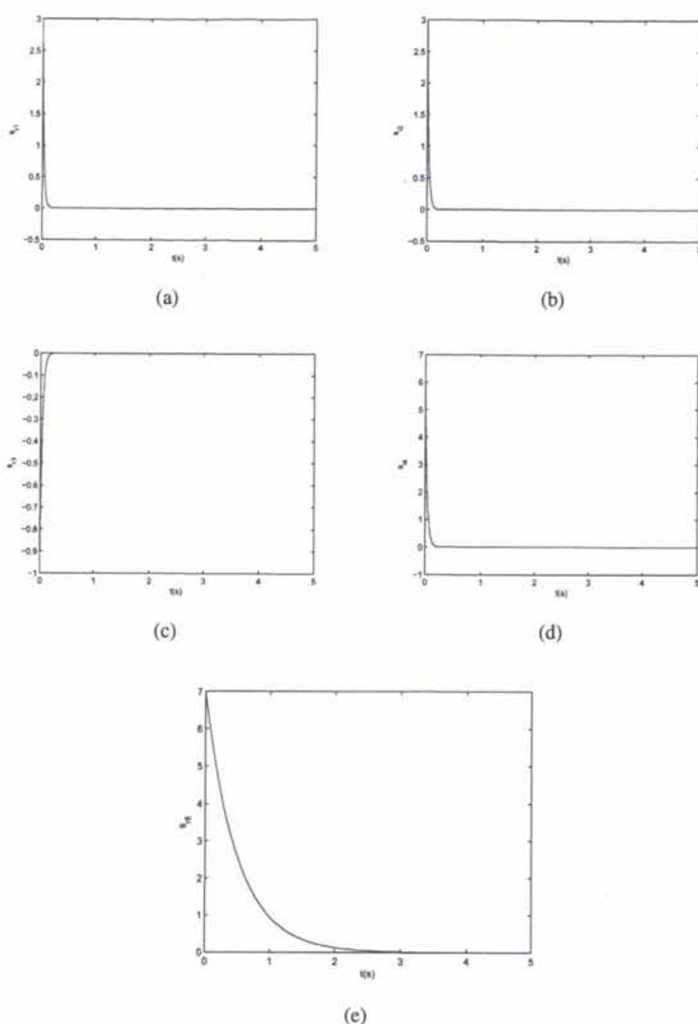


图 4.5: 新的复类 Lorenz 系统 (4.2.2) 和复 Lorenz 系统 (4.4.11) 反同步误差.

4.4.2 反馈控制方法

2002 年, L$\ddot{u}$ 通过混沌反馈思想发现了一类变异的 Lorenz 系统(简称为 L$\ddot{u}$ 系统), 并研究了此系统的混沌特性[80]. 取此系统的复变量形式(复 L$\ddot{u}$ 系统)

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{v}_1 & = & a_3(v_2 - v_1),\\ \dot{v}_2 & = & c_3 v_2 - v_1 v_3,\\ \dot{v}_3 & = & -b_3 v_3 + \frac{1}{2}(\bar{v}_1 v_2 + v_1 \bar{v}_2),\end{array}\right. \tag{4.4.17}$$

为驱动系统, 式中 $v_1 = v_1^r + jv_1^i = u_{13} + ju_{23}$ 和 $v_2 = v_2^r + jv_2^i = u_{33} + ju_{43}$ 是复变量, $v_3 = u_{53}$ 是实变量, 并且 $j = \sqrt{-1}$, $\dot{v}$ 表示变量 v 对时间 t 的微分和 $\bar{z}$ 表示复变量 z 的共轭转置. 分离混沌复系统 (4.4.17) 的实部和虚部, 得到与复 L$\ddot{u}$ 系统等价的实系统为

$$\begin{cases} \dot{u}_{13} &= a_3(u_{33} - u_{13}), \\ \dot{u}_{23} &= a_3(u_{43} - u_{23}), \\ \dot{u}_{33} &= c_3 u_{33} - u_{13}u_{53}, \\ \dot{u}_{43} &= c_3 u_{43} - u_{23}u_{53}, \\ \dot{u}_{53} &= -b_3 u_{53} + u_{13}u_{33} + u_{23}u_{43}. \end{cases} \tag{4.4.18}$$

当 $a_3 = 29, b_3 = 2, c_3 = 21$ 和初始值 $u_{13}(0) = 4$, $u_{23}(0) = -2$, $u_{33}(0) = 3$, $u_{43}(0) = 2$, $u_{53}(0) = -0.5$ 时, 复 L$\ddot{u}$ 系统存在混沌吸引子如图 4.6(*a*-*b*)及最大 Lyapunov 指数如图 4.6(c).

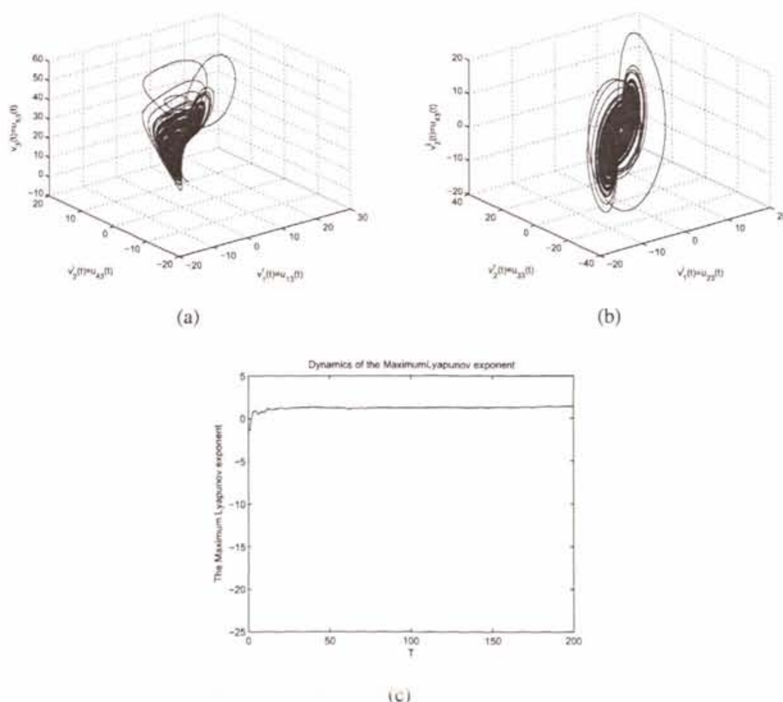


图 4.6: 复 L$\ddot{u}$ 系统在不同投影面的混沌吸引子及其最大 Lyapunov 指数.

取新的复类 Lorenz 系统 (4.2.2) 为响应系统, 根据反同步误差的定义, 有误差系统

$$\begin{cases} \dot{s}_1^r &= a_3(s_3^r - s_1^r) + (a_1 + a_3)(u_{11} - u_{31}) + I_1^r, \\ \dot{s}_2^i &= -a_3(s_4^i - s_2^i) + (a_1 + a_3)(u_{21} - u_{41}) + I_2^i, \\ \dot{s}_3^r &= -c_1 s_3^r + (c_1 + c_3)u_{33} + u_{11}u_{51} - u_{13}u_{53} + I_3^r, \\ \dot{s}_4^i &= -c_1 s_4^i + (c_1 + c_3)u_{43} + u_{21}u_{51} - u_{23}u_{53} + I_4^i, \\ \dot{s}_5 &= -b_1 s_5 + (b_1 - b_3)u_{53} + u_{13}u_{33} + u_{23}u_{43} + d_1(u_{11}u_{31} + u_{21}u_{41}) + I_5. \end{cases} \tag{4.4.19}$$

设计控制器

$$\begin{cases} I_1^r &= a_3(s_1^r - s_3^r) - (a_1 + a_3)(u_{11} - u_{31}) - k_1 s_1^r, \\ I_2^i &= a_3(s_2^i - s_4^i) - (a_1 + a_3)(u_{21} - u_{41}) - k_2 s_2^i, \\ I_3^r &= -(c_1 + c_3)u_{33} + (c_1 - k_3)s_3^r + u_{13}u_{53} - u_{11}u_{51}, \\ I_4^i &= -(c_1 + c_3)u_{43} + (c_1 - k_4)s_4^i + u_{23}u_{53} - u_{21}u_{51}, \\ I_5 &= (b_1 - k_5)s_5 + (b_3 - b_1)u_{53} - u_{13}u_{33} - u_{23}u_{43} - d_1(u_{11}u_{31} - u_{21}u_{41}), \end{cases} \tag{4.4.20}$$

式中 k_l ($l = 1, 2, 3, 4, 5$) 是正数, 用于控制达到反同步的速度.
将控制器代入误差系统 (4.4.19), 我们有

$$\begin{cases} \dot{s}_1^r &= -k_1 s_1^r, \\ \dot{s}_2^i &= -k_2 s_2^i, \\ \dot{s}_3^r &= -k_3 s_3^r, \\ \dot{s}_4^i &= -k_4 s_4^i, \\ \dot{s}_5 &= -k_5 s_5. \end{cases} \tag{4.4.21}$$

显然系统 (4.4.23) 的特征值为 $-k_1$, $-k_2$, $-k_3$, $-k_4$, $-k_5$, 且都具有负实部, 因此误差系统是稳定的, 即复 Lü 系统 (4.4.17) 与新的复类 Lorenz 系统 (4.2.2) 实现反同步.

令 $k_1 = 1.5$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0.5$, $k_4 = 2$, $k_5 = 1.5$, 并采用四阶 Runge-Kutta 法求解系统 (4.4.12) 和 (4.4.18). 取驱动系统 (4.4.18) 和响应系统 (4.4.12) 的参

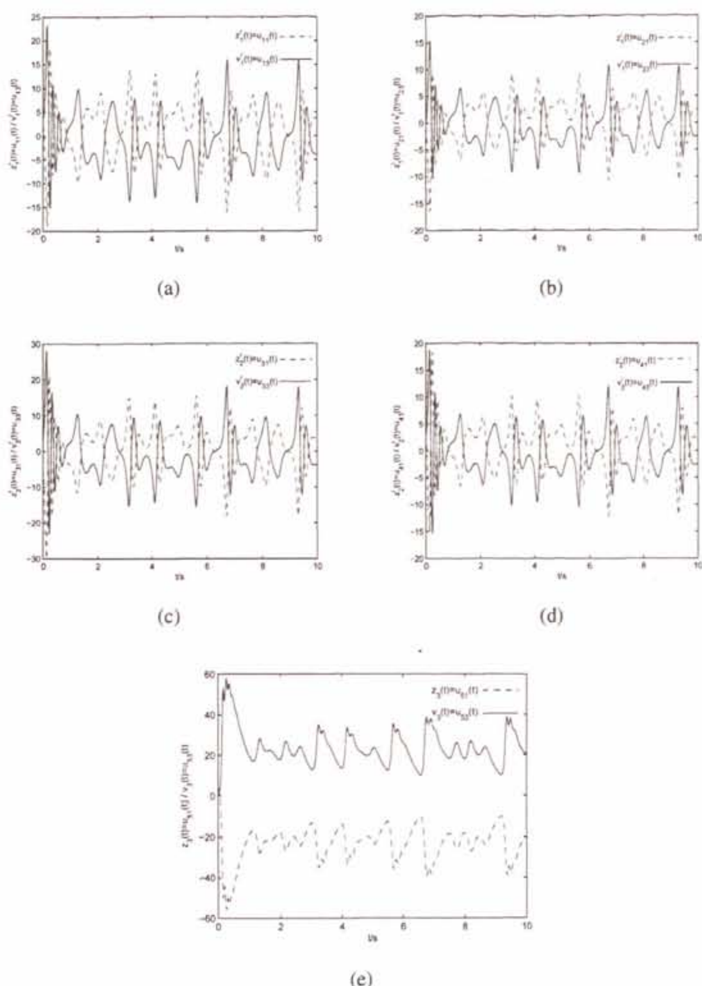


图 4.7: 在反馈控制器 (4.4.20) 的控制下, 复 Lü 系统 (4.4.17) 与新的复类 Lorenz 系统实现反同步.

数为 $a_3 = 29$, $b_3 = 2$, $c_3 = 21$ 和 $a_1 = 20$, $b_1 = 2$, $c_1 = 28$, $d_1 = 1$, 初始条件为 $u_{13}(0) = 4$, $u_{23}(0) = -2$, $u_{33}(0) = 3$, $u_{43}(0) = 2$, $u_{53}(0) = -0.5$ 和 $u_{11}(0) = 2$, $u_{21}(0) = 1$, $u_{31}(0) = -5$, $u_{41}(0) = 3$, $u_{51}(0) = 4$. 于是, 反同步误差系统 (4.4.24) 的初始值为 $s_1^r(0) = 6$, $s_2^i(0) = -1$, $s_3^r(0) = -2$, $s_4^i(0) = 5$, $s_5(0) = 3.5$.

系统 (4.2.3) 和 (4.4.18) 的反同步结果如图 4.7 所示. 由反同步误差图 4.8 可知, 当 $t \to \infty$ 时 $s_1^r(t)$, $s_2^i(t)$, $s_3^r(t)$, $s_4^i(t)$ 和 $s_5(t)$ 分别精确地稳定在零点, 因此系统 (4.4.18) 和系统 (4.2.3) 的实部和虚部分别实现了准确的反同步, 也就是说复 Lü 系统 (4.4.17) 和新的复类 Lorenz 系统 (4.2.2) 实现了反同步.

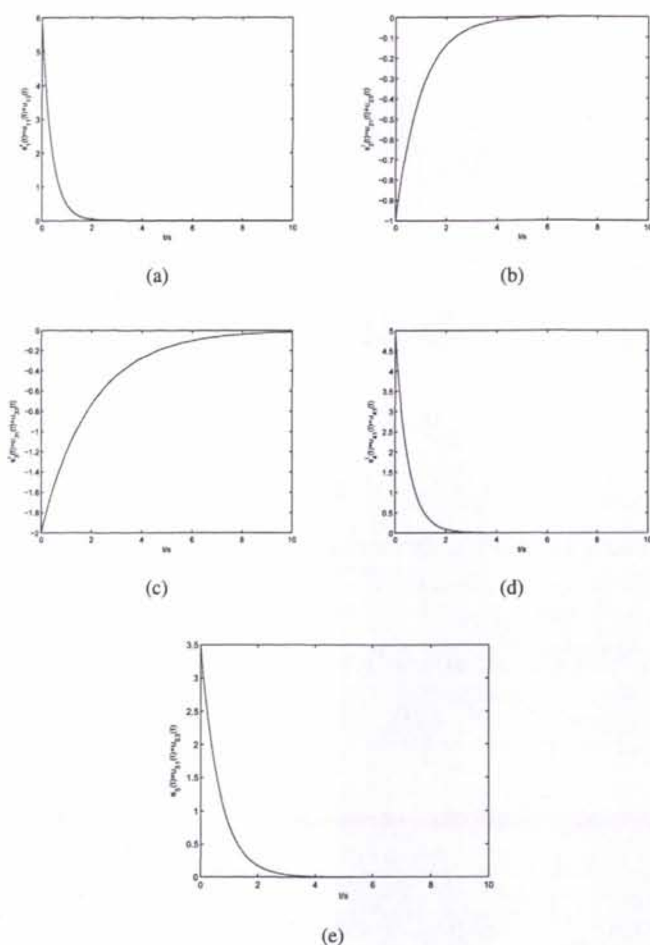


图 4.8: 复 Lü 系统 (4.4.17) 与新的复类 Lorenz 系统的反同步误差.

4.5 小结

讨论了新的复类 Lorenz 系统 (4.2.2) 的基本动态特性, 并分别利用主动控制和线性反馈控制法实现了它与复 Lorenz 系统和复 Lü 系统的反同步. 这两种方法具有控制器设计过程简单易行、计算量小等特点, 而主动控制是基于所构造的 Lyapunov 函数, 设计控制器使其满足 Lyapunov 稳定性条件以实现与复 Lorenz 系统的反同步. 线性反馈控制是先将非线性误差系统化成线性系统, 然后结合线性系统控制理论的稳定性原理以实现与复 Lü 系统的反同步. 但是线性反馈控制方法优于主动控制方法, 因为线性反馈控制方法实施更简单, 并可调节实现反同步的速度. **本章内容已发表在国际期刊 Physica scripta 上.**

第五章　含有未知参数的不确定混沌复系统的自适应反同步

5.1　引言

混沌复系统仅有少量研究, 主要针对相同结构和不同结构混沌复系统的同步问题[74, 75, 81–84], 而关于混沌复系统反同步的研究极少, 尤其对参数未知的混沌复系统反同步的研究目前仍是空白. 在实际应用中, 混沌复系统的同步用于保密通信时, 驱动混沌复系统与响应混沌复系统的结构可能是相同的, 也可能是不同的. 而且随着环境的改变, 系统的参数也会发生变化. 因此, 考虑未知参数的相同和不同结构混沌复系统的反同步问题具有重要的理论意义和应用价值. 本章研究了含有未知参数的不确定混沌复系统的自适应反同步问题.

5.2　问题描述

设驱动混沌复系统为

$$\dot{\mathbf{z}} \;=\; \mathbf{F}(\mathbf{z})\mathbf{A}+\mathbf{f}(\mathbf{z}), \tag{5.2.1}$$

其中 $\mathbf{z}=[z_1, z_2, \cdots, z_n]^T$ 是复状态变量(T 表示转置), 并且 $\mathbf{z}=\mathbf{z}^r+j\mathbf{z}^i$. 令 $z_1=u_1+ju_2, z_2=u_3+ju_4, \cdots, z_n=u_{2n-1}+ju_{2n}$, 并表示 $\mathbf{z}^r=(u_1, u_3, \cdots, u_{2n-1})$, $\mathbf{z}^i=(u_2, u_4, \cdots, u_{2n})^T$. $\mathbf{f}=(f_1, f_2, \cdots, f_n)^T$ 是复变量函数向量, $\mathbf{F}(\mathbf{z})$ 是一个 $n\times n$ 复矩阵, 并且它的元素是复变量函数, $\mathbf{A}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ 是一个 $n\times 1$ 实(或者复) 向量系统参数.

设响应混沌复系统为

$$\dot{\mathbf{w}} \;=\; \mathbf{G}(\mathbf{w})\mathbf{B}+\mathbf{g}(\mathbf{w})+\mathbf{v}, \tag{5.2.2}$$

其中 $\mathbf{w}=[w_1, w_2, \cdots, w_n]^T$ 是复状态向量, $\mathbf{w}=\mathbf{w}^r+j\mathbf{w}^i$, $\mathbf{w}^r=(u_1', u_3', \cdots, u_{2n-1}')$, $\mathbf{w}^i=(u_2', u_4', \cdots, u_{2n}')^T$. $\mathbf{g}=(g_1, g_2, \cdots, g_n)^T$ 是复变量函数, $\mathbf{G}(\mathbf{w})$ 是一个 $n\times n$ 复矩阵, 并且它的元素是复状态变量函数, $\mathbf{B}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$

是一个 $n \times 1$ 实(或者复) 向量系统参数; $\mathbf{v} = \mathbf{v}^r + j\mathbf{v}^i$ 是需要设计的控制器, 其中 $\mathbf{v}^r = (v_1, v_3, \cdots, v_{2n-1})$ 和 $\mathbf{v}^i = (v_2, v_4, \cdots, v_{2n})$.

定义反同步误差为 $\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) + \mathbf{w}(t)$, 其中 $\mathbf{e}^r(t) = \mathbf{z}^r(t) + \mathbf{w}^r(t)$ 和 $\mathbf{e}^i(t) = \mathbf{z}^i(t) + \mathbf{w}^i(t)$, 并且 $\mathbf{e}^r(t) = (e_1(t), e_3(t), \cdots, e_{2n-1}(t))^T$, $\mathbf{e}^i(t) = (e_2(t), e_4(t), \cdots, e_{2n}(t))^T$. 本章的基本目标就是设计控制器 $\mathbf{v}$ 使得反同步误差向量 $\mathbf{e}(t)$: 当 $t \to \infty$ 时, $\mathbf{e}(t) \to 0$, 即

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{e}^r(t)\|^2 &= \lim_{t\to\infty} \|\mathbf{z}^r(t, \mathbf{z_0}^r) + \mathbf{w}^r(t, \mathbf{w_0}^r)\|^2 \\
&= \lim_{t\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \|u_{2k-1}(t, u_{2k-1}(0)) + u'_{2k-1}(t, u'_{2k-1}(0))\|)^2 \\
&= 0, \\
\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{e}^i(t)\|^2 &= \lim_{t\to\infty} \|\mathbf{z}^i(t, \mathbf{z_0}^i) + \mathbf{w}^i(t, \mathbf{w_0}^i)\|^2 \\
&= \lim_{t\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \|u_{2k}(t, u_{2k}(0)) + u'_{2k}(t, u'_{2k}(0))\|)^2 \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

有

$$
\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{e}(t)\| = \lim_{t\to\infty} \sqrt{\|\mathbf{e}^r(t)\|^2 + \lim_{t\to\infty} \|\mathbf{e}^i(t)\|^2} = 0,
$$

其中复系统 (5.2.1) 和 (5.2.2) 初始值的实部和虚部分别为 $\mathbf{z_0}^r = [u_1(0), u_3(0), \cdots, u_{2n-1}(0)]^T$, $\mathbf{z_0}^i = [u_2(0), u_4(0), \cdots, u_{2n}(0)]^T$ 和 $\mathbf{w_0}^r = [u'_1(0), u'_3(0), \cdots, u'_{2n-1}(0)]^T$, $\mathbf{w_0}^i = [u'_2(0), u'_4(0), \cdots, u'_{2n}(0)]^T$.

5.3 自适应控制器的设计

定理 5.1. 设计控制器为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \mathbf{v}^r + j\mathbf{v}^i = -\mathbf{F}(\mathbf{z})\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{f}(\mathbf{z}) - \mathbf{G}(\mathbf{w})\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{g}(\mathbf{w}) - k\mathbf{e} \\
&= -\mathbf{F}^r(u_1, u_3, \cdots, u_{2n-1})\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{f}^r(u_1, u_2, \cdots, u_n) \\
&\quad -\mathbf{G}^r(u'_1, u'_2, \cdots, u'_{2n-1})\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{g}^r(u'_1, u'_2, \cdots, u'_n) - k\mathbf{e}^r \\
&\quad +j[-\mathbf{F}^i(u_2, u_4, \cdots, u_{2n})\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{f}^i(u_1, u_2, \cdots, u_n)
\end{aligned}
$$

$$-\mathbf{G}^i(u'_2, u'_4, \cdots, u'_{2n})\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{g}^i(u'_1, u'_2, \cdots, u'_n) - k\mathbf{e}^i] \qquad (5.3.1)$$

和参数向量自适应率为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{A}}} = [(\mathbf{F}^r(u_1, u_3, \cdots, u_{2n-1}))^T, (\mathbf{F}^i(u_2, u_4, \cdots, u_{2n}))^T] \begin{bmatrix} \mathbf{e}^r \\ \mathbf{e}^i \end{bmatrix}, \\ \dot{\hat{\mathbf{B}}} = [(\mathbf{G}^r(u'_1, u'_3, \cdots, u'_{2n-1}))^T, (\mathbf{G}^i(u'_2, u'_4, \cdots, u'_{2n}))^T] \begin{bmatrix} \mathbf{e}^r \\ \mathbf{e}^i \end{bmatrix}, \end{cases} \qquad (5.3.2)$$

则混沌复系统系统 (5.2.1) 和 (5.2.2) 实现渐近反同步, 其中 k 为常数且 $k > 0$, 向量 $\hat{\mathbf{A}}$ 和 $\hat{\mathbf{B}}$ 是未知参数向量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的估计.

证明: 由反同步误差的定义和系统 (5.2.1), (5.2.2) 可得误差系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{e}}^r + j\dot{\mathbf{e}}^i \\ &= \mathbf{F}^r(u_1, u_3, \cdots, u_{2n-1})\mathbf{A} + \mathbf{f}^r(u_1, u_2, \cdots, u_n) \\ &\quad + \mathbf{G}^r(u'_1, u'_3, \cdots, u'_{2n-1})\mathbf{B} + \mathbf{g}^r(u'_1, u'_2, \cdots, u'_n) + \mathbf{v}^r \\ &\quad + j[\mathbf{F}^i(u_2, u_4, \cdots, u_{2n})\mathbf{A} + \mathbf{f}^i(u_1, u_2, \cdots, u_n) \\ &\quad + \mathbf{G}^i(u'_2, u'_4, \cdots, u'_{2n})\mathbf{B} + \mathbf{g}^i(u'_1, u'_2, \cdots, u'_n) + \mathbf{v}^i]. \end{aligned}$$

将混沌复系统 (5.2.1) 和 (5.2.2) 以及控制器 (5.3.1) 代入误差系统, 分离它们的实部和虚部, 则有

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}^r = \mathbf{F}^r(u_1, u_3, \cdots, u_{2n-1})(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}) + \mathbf{G}^r(u'_1, u'_2, \cdots, u'_{2n-1})(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}) \\ \qquad -k\mathbf{e}^r, \\ \dot{\mathbf{e}}^i = \mathbf{F}^i(u_2, u_4, \cdots, u_{2n})(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}) + \mathbf{G}^i(u'_2, u'_4, \cdots, u'_{2n})(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}) \\ \qquad -k\mathbf{e}^i. \end{cases} \qquad (5.3.3)$$

令 $\tilde{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A}$, $\tilde{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}$, 选取 Lyapunov 函数为

$$V(\mathbf{e}^r, \mathbf{e}^i, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) = (1/2)[(\mathbf{e}^r)^T\mathbf{e}^r + (\mathbf{e}^i)^T\mathbf{e}^i + \tilde{\mathbf{A}}^T\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}^T\tilde{\mathbf{B}}],$$

则它沿着误差系统 (5.3.3) 的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V} &= (\dot{\mathbf{e}}^r)^T\mathbf{e}^r + (\dot{\mathbf{e}}^i)^T\mathbf{e}^i + \tilde{\mathbf{A}}^T\dot{\tilde{\mathbf{A}}} + \tilde{\mathbf{B}}^T\dot{\tilde{\mathbf{B}}} \\ &= [\mathbf{F}^r(u_1, u_3, \cdots, u_{2n-1})(\mathbf{A}-\hat{\mathbf{A}}) + \mathbf{G}^r(u_1', u_3', \cdots, u_{2n-1}')(\mathbf{B}-\hat{\mathbf{B}}) \\ &\quad -k\mathbf{e}^r]^T\mathbf{e}^r + [\mathbf{F}^i(u_2, u_4, \cdots, u_{2n})(\mathbf{A}-\hat{\mathbf{A}}) \\ &\quad +\mathbf{G}^i(u_2', u_4', \cdots, u_{2n}')(\mathbf{B}-\hat{\mathbf{B}}) - k\mathbf{e}^i]^T\mathbf{e}^i \\ &\quad +\tilde{\mathbf{A}}^T[(\mathbf{F}^r(u_1, u_3, \cdots, u_{2n-1}))^T\mathbf{e}^r + (\mathbf{F}^i(u_2, u_4, \cdots, u_{2n}))^T\mathbf{e}^i] \\ &\quad +\tilde{\mathbf{B}}^T[(\mathbf{G}^r(u_1', u_3', \cdots, u_{2n-1}'))^T\mathbf{e}^r + (\mathbf{G}^i(u_2', u_4', \cdots, u_{2n}'))^T]\mathbf{e}^i \\ &= -k[(\mathbf{e}^r)^T\mathbf{e}^r + (\mathbf{e}^i)^T\mathbf{e}^i] \\ &\le 0.\end{aligned}$$

由于 V 是正定的, $\dot{V}$ 负半定的, 可推断误差系统 (5.3.3) 在原点处是渐近稳定的. 事实上, 由于 $\dot{V} \le 0$, 有 $e_1, e_3, \cdots, e_{2n-1} \in L_\infty$, $e_2, e_4, \cdots, e_{2n} \in L_\infty$, $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n \in L_\infty$ 和 $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \cdots, \tilde{b}_n \in L_\infty$. 又

$$\int_0^t ((\mathbf{e}^r)^T\mathbf{e}^r + (\mathbf{e}^i)^T\mathbf{e}^i)dt = \int_0^t \|\mathbf{e}^r\|^2 + \|\mathbf{e}^i\|^2 dt = -(1/k)(V(t) - V(0)) \le V(0)/k,$$

所以 $e_1, e_3, \cdots, e_{2n-1} \in L_2$ 和 $e_2, e_4, \cdots, e_{2n} \in L_2$. 在误差系统 (5.3.3) 中, 有 $\dot{e}_1, \dot{e}_3, \cdots, \dot{e}_{2n-1} \in L_\infty$ 和 $\dot{e}_2, \dot{e}_4, \cdots, \dot{e}_{2n} \in L_\infty$. 根据 Barbalat 引理, 当 $t \to \infty$ 时, 有 $e_1, e_3, \cdots, e_{2n-1} \to 0$ 和 $e_2, e_4, \cdots, e_{2n} \to 0$, 然后有

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{e}^r(t)\|^2 + \|\mathbf{e}^i(t)\|^2 \\ =& \lim_{t\to\infty}[(\sum_{k=1}^n \|e_{2k-1}(t, e_{2k-1}(0))\|)^2 + (\sum_{k=1}^n \|e_{2k}(t, e_{2k}(0))\|)^2] \\ =& \lim_{t\to\infty}[(\sum_{k=1}^n \|u_{2k-1}(t, u_{2k-1}(0)) + u_{2k-1}'(t, u_{2k-1}'(0))\|)^2 \\ &+(\sum_{k=1}^n \|u_{2k}(t, u_{2k}(0)) + u_{2k}'(t, u_{2k}'(0))\|)^2] \\ =& 0,\end{aligned}$$

故有

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{e}(t)\| = \lim_{t\to\infty} \sqrt{\|\mathbf{e}^r(t)\|^2 + \|\mathbf{e}^i(t)\|^2} = 0.$$

因此, 响应混沌复系统 (5.2.2) 和驱动混沌复系统 (5.2.1) 实现渐近自适应反同步. □

注 5.1. 许多典型的混沌复系统可表示为混沌复系统 (5.2.1) 的形式, 如复 Lorenz 系统、复 Chen 系统、复 L$\ddot{u}$ 系统系统、超混沌复 Lorenz 系统、超混沌复 L$\ddot{u}$ 系统、复 Van der Pol 振子和复 Duffing 振子等.

注 5.2. 在混沌复系统 (5.2.1) 和 (5.2.2) 中, 当 $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{G}(\mathbf{z})$ 和$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{g}(\mathbf{z})$, 驱动混沌复系统和响应混沌复系统有相同的结构, 所以定理 5.1 也可应用于实现含有未知参数的相同结构的混沌复系统的反同步.

注 5.3. 在定理 5.1 中, 函数 $\mathbf{F}^r(\cdot)$ 和 $\mathbf{F}^i(\cdot)$ 分别是变量 $u_1, u_3, \cdots, u_{2n-1}$ 和 $u_2, u_4, \cdots, u_{2n}$ 的函数. 但是函数 $\mathbf{f}^r(\cdot)$ 和 $\mathbf{f}^i(\cdot)$ 有具体系统决定所含有的变量, 可能含有变量 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的全部, 也可能含有这些变量中的部分变量, 也就是说, 函数 $\mathbf{f}^r(\cdot)$ 和 $\mathbf{f}^i(\cdot)$ 的实虚部不能完全分离. 函数 $\mathbf{G}^r(\cdot)$, $\mathbf{G}^i(\cdot)$ 和 $\mathbf{g}^r(\cdot)$, $\mathbf{g}^i(\cdot)$ 所含变量与上面的分析一致.

注 5.4. 如果 $\mathbf{A}$ 是一个复向量矩阵, 则 $\mathbf{A}$ 可以表示为 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^r + j\mathbf{A}^i$, 那么驱动混沌复系统 (5.2.1) 变为

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}(\mathbf{z})(\mathbf{A}^r + j\mathbf{A}^i) + \mathbf{f}(\mathbf{z}), \tag{5.3.4}$$

又可写成

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{z})\mathbf{A}^r + \mathbf{f}_1(\mathbf{z}) \tag{5.3.5}$$

和

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{z})\mathbf{A}^i - j\mathbf{f}_2(\mathbf{z}), \tag{5.3.6}$$

其中 $\mathbf{f}_1(\mathbf{z}) + \mathbf{f}_2(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z})$. 同样地, 当 $\mathbf{B}$ 是一个复变量矩阵, 那么响应混沌复系统 (5.2.2) 也变为

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{G}(\mathbf{w})(\mathbf{B}^r + j\mathbf{B}^i) + \mathbf{g}(\mathbf{w}) + \mathbf{v}', \tag{5.3.7}$$

也可表示为

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{G}(\mathbf{w})\mathbf{B}^r + \mathbf{g}_1(\mathbf{w}) + \mathbf{v}'' \tag{5.3.8}$$

和

$$\dot{\mathbf{w}}_2 = \mathbf{G}(\mathbf{w})\mathbf{B}^i - j\mathbf{g}_2(\mathbf{w}) + \mathbf{v}''', \tag{5.3.9}$$

其中 $\mathbf{g}_1(\mathbf{w}) + \mathbf{g}_2(\mathbf{w}) = \mathbf{g}(\mathbf{w})$. 混沌复子系统 (5.3.5), (5.3.6) 和(5.3.8), (5.3.9) 的结构分别与混沌复系统 (5.2.1) 和 (5.2.2) 的结构相同. 于是, 实现混沌复子系统 (5.3.5) 和 (5.3.8) (或者(5.3.6) 和 (5.3.9)) 反同步的控制器设计与实现混沌复系统 (5.2.1) 和 (5.2.2) 反同步的控制器设计方法相同. 如果混沌复子系统 (5.3.5) 和 (5.3.8), 以及(5.3.6) 和 (5.3.9) 分别实现了自适应反同步, 那么含有复参数的混沌复系统 (5.3.4) 和 (5.3.7) 也实现了自适应反同步.

根据定理 5.1, 分别设计混沌复子系统实现反同步的控制器 $\mathbf{v}''$, $\mathbf{v}'''$ 和参数向量自适应率 $\hat{\mathbf{A}}^r$, $\hat{\mathbf{B}}^r$, $\hat{\mathbf{A}}^i$, $\hat{\mathbf{B}}^i$, 实现混沌复子系统 (5.3.5) 和 (5.3.8), 以及(5.3.6) 和 (5.3.9) 的反同步. 因此, 实现混沌复系统 (5.3.4) 和 (5.3.7) 的反同步的控制器为 $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'' + j\mathbf{v}'''$, 并且参数向量自适应率为 $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^r + j\hat{\mathbf{A}}^i$, $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}}^r + j\hat{\mathbf{B}}^i$.

5.4 仿真算例

根据注 5.4, 混沌复系统实现反同步的控制器设计对于复参数向量的情形与实参数向量的情形是类似的. 于是, 为了简化计算, 以实参数向量的混沌复系统实现反同步为例, 说明所提出的自适应反同步控制技术.

5.4.1 两个相同混沌复系统的自适应反同步

以复 Lorenz 系统为例, 说明结构相同的混沌复系统反同步的实现, 并设驱动复 Lorenz 系统用复变量 z 表示, 响应复 Lorenz 系统用复变量 w 表示. 因此,

驱动混沌复系统和响应混沌复系统分别为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= a_1(z_2 - z_1), \\ \dot{z}_2 &= a_2 z_1 - z_2 - z_1 z_3, \\ \dot{z}_3 &= -a_3 z_3 + (1/2)(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) \end{cases} \tag{5.4.1}$$

和

$$\begin{cases} \dot{w}_1 &= a_1(w_2 - w_1) + v_1 + jv_2, \\ \dot{w}_2 &= a_2 w_1 - w_2 - w_1 w_3 + v_3 + jv_4, \\ \dot{w}_3 &= -a_3 w_3 + (1/2)(\bar{w}_1 w_2 + w_1 \bar{w}_2) + v_5. \end{cases} \tag{5.4.2}$$

首先将混沌复系统 (5.4.1) 和 (5.4.2) 分别转化为混沌复系统 (5.2.1) 和 (5.2.2) 的形式

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}(\mathbf{z})\mathbf{A} + \mathbf{f}(\mathbf{z}),$$

其中

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} z_2 - z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & -z_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -z_2 - z_1 z_3 \\ (1/2)(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) \end{pmatrix}.$$

同样地,

$$\mathbf{G}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} w_2 - w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_1 & 0 \\ 0 & 0 & -w_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -w_2 - w_1 w_3 \\ (1/2)(\bar{w}_1 w_2 + w_1 \bar{w}_2) \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$ 和 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ 分别是驱动混沌复系统 (5.4.1) 和响应混沌复系统 (5.4.2) 的状态向量, $\mathbf{A} = \mathbf{B} = (a_1, a_2, a_3)^T$ 是未知的参数向量, 而 v_1, v_2, v_3, v_4 和 v_5 是需要设计的控制输入.

根据定理 5.1, 设计控制器为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= -\mathbf{F}(\mathbf{z})\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{f}(\mathbf{z}) - \mathbf{G}(\mathbf{w})\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{g}(\mathbf{w}) - k\mathbf{e} \\
&= \begin{pmatrix} -(z_2 - z_1)\hat{a}_1 - (w_2 - w_1)\hat{b}_1 - k(e_1 + je_2) \\ -(z_1\hat{a}_2 - z_2 - z_1z_3) - (w_1\hat{b}_2 - w_2 - w_1w_3) - k(e_3 + je_4) \\ z_3\hat{a}_3 - (1/2)(\bar{z}_1z_2 + z_1\bar{z}_2) - (-w_3\hat{a}_3 + (1/2)(\bar{w}_1w_2 + w_1\bar{w}_2)) - ke_5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\hat{a}_1(u_3 - u_1 + u_3' - u_1') - ke_1 \\ -\hat{a}_2(u_1 + u_1') + u_3 + u_1u_5 + u_3' + u_1'u_5' - ke_3 \\ \hat{a}_3(u_5 + u_5') - (u_1u_3 + u_2u_4 + u_1'u_3' + u_2'u_4') - ke_5 \end{pmatrix} \\
&\quad + j\begin{pmatrix} -\hat{a}_1(u_4 - u_2 + u_4' - u_2') - ke_2 \\ -\hat{a}_2(u_2 + u_2') + u_4 + u_2u_5 + u_4' + u_2'u_5' - ke_4 \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{5.4.3}
$$

参数向量自适应率为

$$
\begin{cases}
\dot{\hat{\mathbf{A}}} = [(\mathbf{F}^r)^T, (\mathbf{F}^i)^T] \begin{bmatrix} \mathbf{e}^r \\ \mathbf{e}^i \end{bmatrix}, \\
\dot{\hat{\mathbf{B}}} = [(\mathbf{G}^r)^T, (\mathbf{G}^i)^T] \begin{bmatrix} \mathbf{e}^r \\ \mathbf{e}^i \end{bmatrix}.
\end{cases}
$$

由于 $\mathbf{A} = \mathbf{B} = (a_1,\ a_2,\ a_3)^T$, 则

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{A}}} = \dot{\hat{\mathbf{B}}} &= (1/2)\left[\ (\mathbf{F}^r)^T + (\mathbf{G}^r)^T \quad (\mathbf{F}^i)^T + (\mathbf{G}^i)^T\ \right] \begin{bmatrix} \mathbf{e}^r \\ \mathbf{e}^i \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (u_3 - u_1 + u_3' - u_1')e_1 + (u_4 - u_2 + u_4' - u_2')e_2 \\ (u_1 + u_1')e_3 + (u_2 + u_2')e_4 \\ -(u_5 + u_5')e_5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (e_3 - e_1)e_1 + (e_4 - e_2)e_2 \\ e_1e_3 + e_2e_4 \\ -e_5^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.4.4}
$$

其中 $e_m = u_m + u'_m$, $m = 1, 2, 3, 4, 5$.

在仿真中, 选取未知参数为 $a_1 = 10, a_2 = 28, a_3 = 8/3$, 复 Lorenz 系统 (5.4.1) (或者 (5.4.2)) 的运动轨迹具有混沌行为, 详细分析见参考文献[85]. 设混沌复系统的状态初始值为 $(z_1(0), z_2(0), z_3(0))^T = (2+1j, 1.5+5j, 3)^T$, $(w_1(0), w_2(0), w_3(0))^T = (0.8+3j, 2+5j, 4)^T$, 选取参数向量的初始值为 $(a_1(0), a_2(0), a_3(0))^T = (10, 10, 10)^T$, 并取 $k = 0.5$, 所以误差系统的状态初始值为 $(e_1(0), e_2(0), e_3(0))^T = (2.8+4j, 3.5+10j, 7)^T$. 复 Lorenz 系统的自

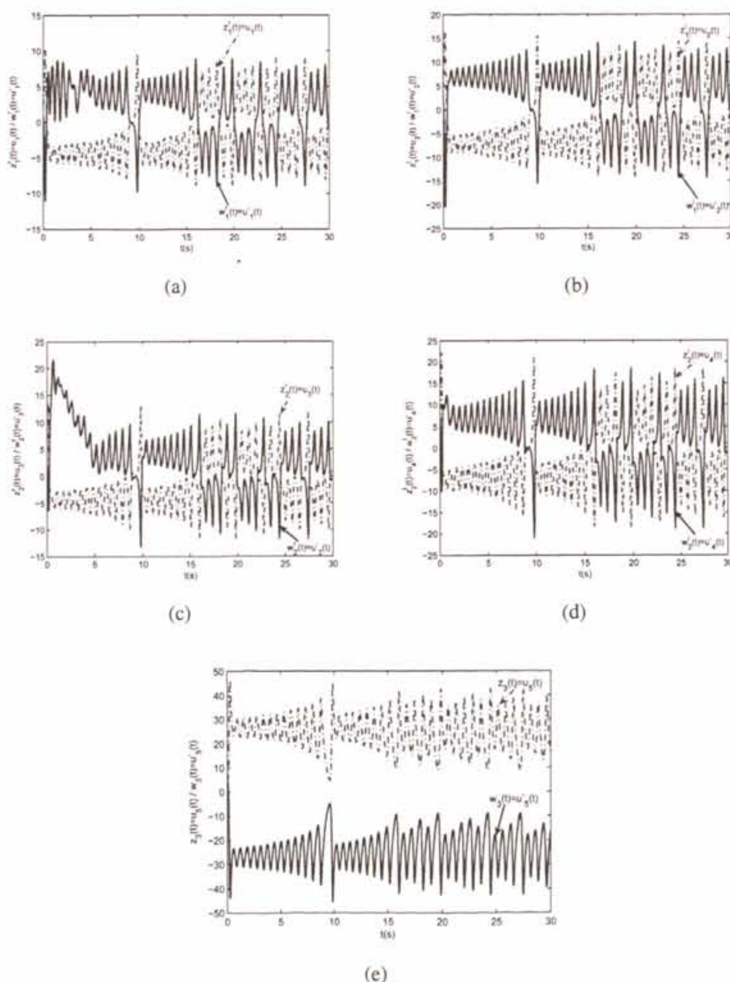


图 5.1: 复 Lorenz 系统的状态变量的反同步情形.

适应反同步情形, 反同步误差向量 **e** 和参数估计 $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$ 随时间的变化, 如图 5.1–5.3 所示. 图 5.1 展示了驱动和响应混沌复系统的状态响应实现自适应反同

步, 图 5.2 显示了反同步误差随时间的变化逐渐趋于零的过程, 图 5.3 说明当 $t \to \infty$ 时, 参数估计 $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$ 分别趋向于 $a_1 = 10$, $a_2 = 28$, $a_3 = 8/3$.

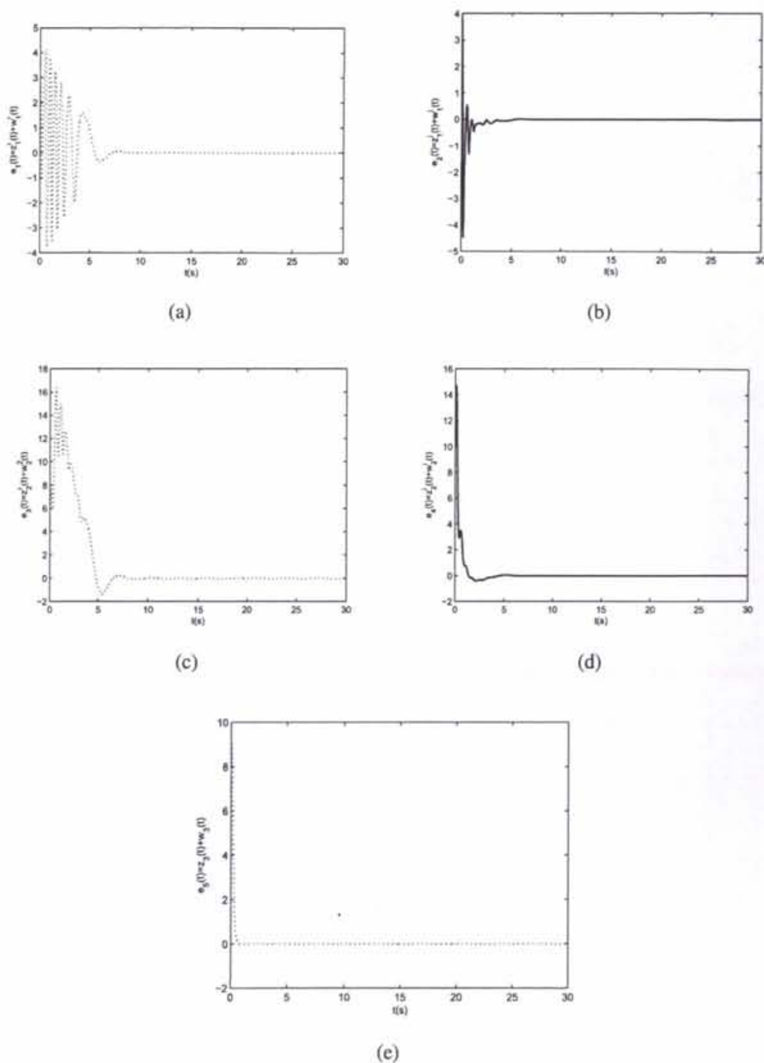


图 5.2: 复 Lorenz 系统的反同步误差的状态时间响应.

5.4.2 两个不同混沌复系统的自适应反同步

以复 Lü 系统和复 Chen 系统为例, 说明含有未知参数的不同结构混沌复系统反同步的实现.

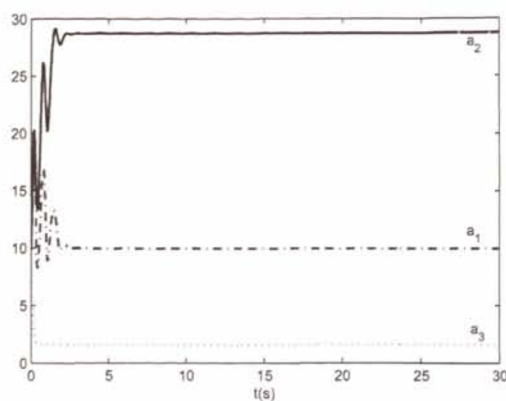


图 5.3: 自适应参数估计 $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ 和 $\hat{a}_3$ 随时间的变化图.

设复 Lü 系统为驱动系统

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{z}_1 & = & a_1(z_2 - z_1),\\ \dot{z}_2 & = & a_2 z_2 - z_1 z_3,\\ \dot{z}_3 & = & -a_3 z_3 + (1/2)(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2),\end{array}\right. \tag{5.4.5}$$

复 Chen 系统为响应系统

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{w}_1 & = & b_1(w_2 - w_1) + v_1 + jv_2,\\ \dot{w}_2 & = & (b_2 - b_1)w_1 + b_2 w_2 - w_1 w_3 + v_3 + jv_4,\\ \dot{w}_3 & = & -b_3 w_3 + (1/2)(\bar{w}_1 w_2 + w_1 \bar{w}_2) + v_5.\end{array}\right. \tag{5.4.6}$$

将混沌复系统 (5.4.5) 和 (5.4.6) 分别写成混沌复系统 (5.2.1) 和 (5.2.2) 的形式

$$\dot{\mathbf{z}} \;=\; \mathbf{F}(\mathbf{z})\mathbf{A} + \mathbf{f}(\mathbf{z}),$$

其中

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} z_2 - z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & -z_3 \end{pmatrix}$$

和

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -z_1 z_3 \\ (1/2)(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) \end{pmatrix},$$

并且 $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$ 是驱动混沌复系统 (5.4.5) 的状态向量, $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)^T$ 是未知参数向量.

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{G}(\mathbf{w})\mathbf{B} + \mathbf{g}(\mathbf{w}),$$

其中

$$\mathbf{G}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} w_2 - w_1 & 0 & 0 \\ -w_1 & w_1 + w_2 & 0 \\ 0 & 0 & -w_3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{g}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -w_1 w_3 \\ (1/2)(\bar{w}_1 w_2 + w_1 \bar{w}_2) \end{pmatrix},$$

并且 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ 是驱动混沌复系统 (5.4.6) 的状态向量, $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)^T$ 是未知参数向量, v_1, v_2, v_3, v_4 和 v_5 需要设计的控制输入.

根据定理 5.1, 设计控制器

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= -\mathbf{F}(\mathbf{z})\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{f}(\mathbf{z}) - \mathbf{G}(\mathbf{w})\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{g}(\mathbf{w}) - k\mathbf{e} \\
&= \begin{pmatrix} (z_1 - z_2)\hat{a}_1 - (w_2 - w_1)\hat{b}_1 - k(e_1 + je_2) \\ z_1 z_3 - z_2\hat{a}_2 + w_1\hat{b}_1 - (w_1 + w_2)\hat{b}_2 + w_1 w_3 - k(e_3 + je_4) \\ z_3\hat{a}_3 - (1/2)(\bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2) + w_3\hat{a}_3 - (1/2)(\bar{w}_1 w_2 + w_1\bar{w}_2) - ke_5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \hat{a}_1(u_1 - u_3) + \hat{b}_1(u_1' - u_3') - ke_1 \\ u_1 u_5 - \hat{a}_2 u_3 + \hat{b}_1 u_1' - (u_1' + u_3')\hat{b}_2 + u_1' u_5' - ke_3 \\ \hat{a}_3 u_5 - (u_1 u_3 + u_2 u_4) + \hat{b}_3 u_5' - (u_1' u_3' + u_2' u_4') - ke_5 \end{pmatrix} \\
&\quad + j\begin{pmatrix} \hat{a}_1(u_2 - u_4) + \hat{b}_1(u_2' - u_4') - ke_2 \\ u_2 u_5 - \hat{a}_2 u_4 + u_2'\hat{b}_1 - (u_2' + u_4')\hat{b}_2 + u_2' u_5' - ke_4 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.4.7}$$

和参数向量自适应率

$$\dot{\hat{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} \dot{\hat{a}}_1 \\ \dot{\hat{a}}_2 \\ \dot{\hat{a}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1(z_2^r - z_1^r) + e_2(z_2^i - z_1^i) \\ z_2^r e_3 + z_2^i e_4 \\ -z_3 e_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_3 - u_1)e_1 + (u_4 - u_2)e_2 \\ u_3 e_3 + u_4 e_4 \\ -u_5 e_5 \end{pmatrix} \tag{5.4.8}$$

和

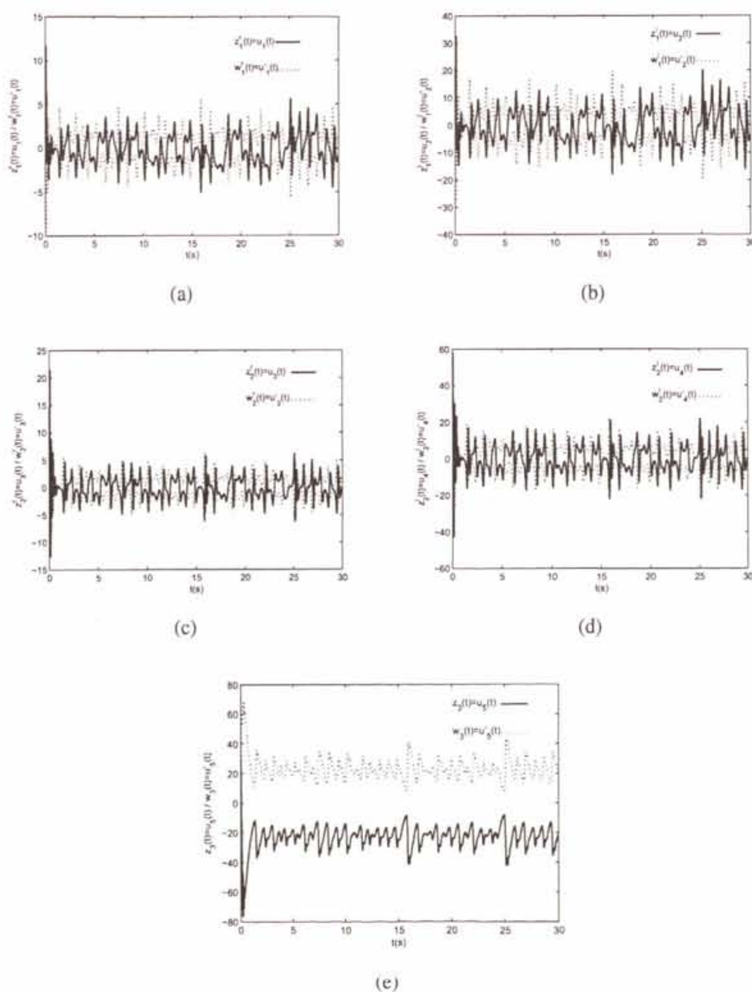
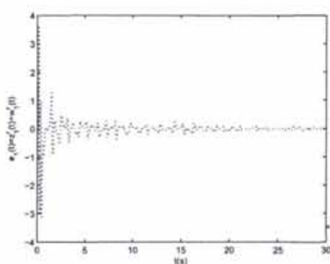
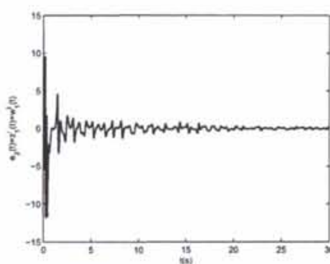


图 5.4: 复 Lorenz 系统和复 $L\ddot{u}$ 系统的状态变量的反同步情形.

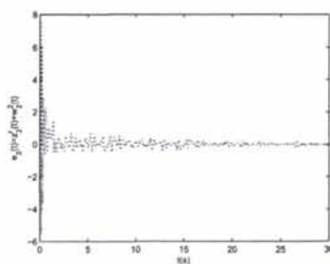
$$
\dot{\hat{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} \dot{\hat{b}}_1 \\ \dot{\hat{b}}_2 \\ \dot{\hat{b}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (w_2^r - w_1^r)e_1 - w_1^r e_3 + (w_2^i - w_1^i)e_2 - w_1^i e_4 \\ (w_2^r + w_1^r)e_3 + (w_2^i + w_1^i)e_4 \\ -w_3 e_5 \end{pmatrix}
$$
$$
= \begin{pmatrix} (u_3' - u_1')e_1 - u_1' e_3 + (u_4' - u_2')e_2 - u_2' e_4 \\ (u_3' + u_1')e_3 + (u_4' + u_2')e_4 \\ -u_5' e_5 \end{pmatrix}. \tag{5.4.9}
$$



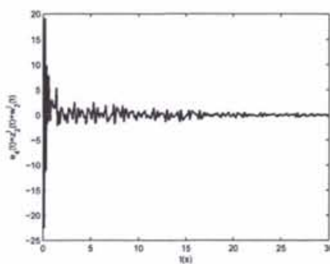
(a)



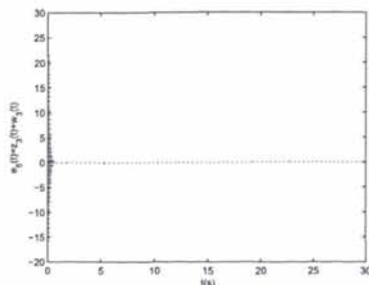
(b)



(c)

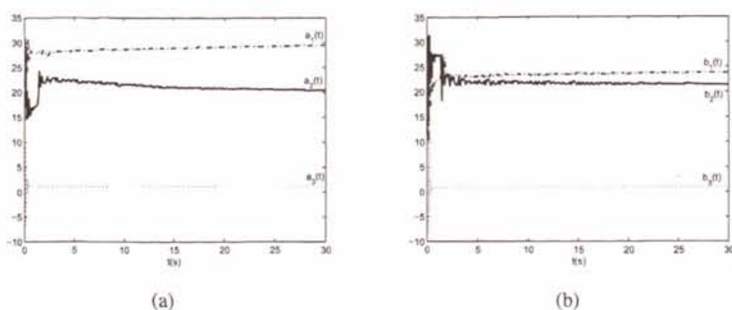


(d)



(e)

图 5.5: 混沌复 Lorenz 系统和混沌复 *Lü* 系统的反同步误差系统.



(a)　　　　(b)

图 5.6: 参数估计$\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$ 和 $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$, $\hat{b}_3$ 的变化.

在数值仿真中, 驱动和响应混沌复系统的未知参数向量分别选取为 $\mathbf{A}=[a_1, a_2, a_3]^T=[29, 21, 2]^T$ 和 $\mathbf{B}=[b_1, b_2, b_3]^T=[27, 23, 1]^T$, 它们的状态初始值分别选取为 $\mathbf{z}(0)=[-3-2j, -2-7j, -5]^T$ 和 $\mathbf{w}(0)=[4+15j, -1-5j, 30]^T$, 根据误差的定义, 则误差向量的初始值为 $[e_1(0), e_2(0), e_3(0)]^T=[1+13j, -3-12j, 25]^T$. 未知参数向量的估计 $\hat{\mathbf{A}}$ 和 $\hat{\mathbf{B}}$ 的初始值分别取为 $\hat{\mathbf{A}}(0)=[10, 10, 10]^T$ 和 $\hat{\mathbf{B}}(0)=[15, 15, 15]^T$. 同时取 $k=2.5$.

响应混沌复系统 (5.4.6) 反同步于驱动混沌复系统 (5.4.5) 如图 5.4 所示. 随着 t 的增加, 反同步误差系统逐渐趋于零如图 5.5 所示. 未知参数向量的估计 $\hat{\mathbf{A}}$ 和 $\hat{\mathbf{B}}$ 随时间的变化如图 5.6(a) 和图 5.6(b) 所示. 可见, 随时间 t 的增加, 未知参数的估计值分别趋于某个常数.

5.5　小结

首先研究了含有未知参数的不同结构的混沌复系统的自适应反同步问题, 设计了自适应反同步控制器, 给出了反同步控制器及参数自适应律的解析式. 在注 5.4 中讨论了控制器设计技术也适用于混沌复系统的参数向量为复变量的情形. 最后, 以复 Lorenz 系统为例说明了此结论用于实现两个相同结构的不确定混沌复系统的反同步控制, 以复 *Lü* 系统和复 Chen 系统为例说明了此结论也适用于实现两个不同结构的不确定混沌复系统的反同步控制. 该方法实现起来简单, 无需试凑. 理论分析和数值仿真结果证实了该方法的可行性和有效性. **本章内容已发表在国际期刊 Nonlinear Analysis: Real World Applications 上.**

第六章 基于状态观测器的混沌复系统的投影同步

6.1 引言

混沌同步在保密通信、图象处理、生态网络等领域具有巨大的潜在应用, 已成为非线性科学领域一个非常热门的研究课题[60, 62, 86–88]. 目前, 多类混沌同步现象及特性已被研究[82, 84, 89–92], 其中投影同步因不可预料的比例因子可增强保密通信的安全性, 成为这一领域研究的热点. 因此, 研究混沌复系统的投影同步具有重要的应用价值. 近几年来, 工程方法被广泛地应用于混沌系统的同步控制中. 基于状态观测器的控制方法[93, 94]就是其中之一, 由于不需要构造同步的条件 Lyapunov 函数, 也不需要同步的两个混沌系统的初始状态处于同一吸引域中, 因而受到了广泛的关注. 利用设计状态观测器的控制方法实现混沌复系统的投影同步的研究目前还是空白, 故本章利用设计状态观测器的控制方法, 研究了混沌复系统的投影同步, 并给出了利用此方法实现同步的特殊情形.

6.2 投影同步的定义

假设驱动混沌复系统定义如下

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{z}) + \mathbf{C}, \tag{6.2.1}$$

其中 $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \cdots, z_n]^T$ 是复状态向量, $\mathbf{z} = \mathbf{z}^r + j\mathbf{z}^i, j = \sqrt{-1}$; $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T$ 是复向量非线性函数, $\mathbf{A}$ 是一个 $n \times n$ 的实矩阵, $\mathbf{B}$ 是一个 $n \times m$ 是实矩阵, $\mathbf{C}$ 是一个 $n \times 1$ 实(或者复) 的向量.

注 6.1. 许多典型的混沌复系统都可表示为混沌复系统 (6.2.1)的形式, 如复 Lorenz 系统, 复 Chen 系统, 复 Van der Pol 振子和复 Duffing 振子等.

构造混沌复系统 (6.2.1) 的观测器, 并假设此观测器为响应混沌复系统

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\mathbf{f}(\hat{\mathbf{z}}) + \mathbf{C} + \mathbf{B}(\alpha\mathbf{s}(\mathbf{z}) - \mathbf{s}(\hat{\mathbf{z}})), \tag{6.2.2}$$

其中 $\mathbf{s}(\mathbf{z})$ 为构造的输出.

定义投影同步误差

$$\mathbf{e} = \hat{\mathbf{z}} - \alpha\mathbf{z}, \tag{6.2.3}$$

其中 α 为比例因子.

定义 6.1. 对于驱动混沌复系统 (6.2.1) 和响应混沌复系统 (6.2.2), 如果存在一个比例因子 α, 当 $t \to \infty$ 时使得误差 (6.2.3) 趋于零, 即 $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{e}\| = \mathbf{0}$, 则驱动混沌复系统 (6.2.1) 和响应混沌复系统 (6.2.2) 实现投影同步.

6.3 基于状态观测的投影同步实现

为了实现混沌复系统 (6.2.1) 的投影同步, 假设系统的输出为

$$\mathbf{s}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}) + \mathbf{k}\mathbf{z}, \tag{6.3.1}$$

其中 $\mathbf{k}$ 为一个 $n \times m$ 反馈增益矩阵.

由投影同步误差的定义知

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\hat{\mathbf{z}}} - \alpha\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{f}(\hat{\mathbf{z}}) - \alpha\mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{z}) + \mathbf{B}(\alpha\mathbf{s}(\mathbf{z}) - \mathbf{s}(\hat{\mathbf{z}})) = \mathbf{A}\mathbf{e} - \mathbf{B}\mathbf{k}\mathbf{e}, \tag{6.3.2}$$

故知

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{r}} + j\dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{i}} = \mathbf{A}\mathbf{e}^{\mathbf{r}} - \mathbf{B}\mathbf{k}\mathbf{e}^{\mathbf{r}} + j(\mathbf{A}\mathbf{e}^{\mathbf{i}} - \mathbf{B}\mathbf{k}\mathbf{e}^{\mathbf{i}}), \tag{6.3.3}$$

即

$$\dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{r}} \ = \ \mathbf{A}\mathbf{e}^{\mathbf{r}} - \mathbf{B}\mathbf{k}\mathbf{e}^{\mathbf{r}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k})\mathbf{e}^{\mathbf{r}} \tag{6.3.4}$$

和

$$\dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{i}} = \mathbf{A}\mathbf{e}^{\mathbf{i}} - \mathbf{B}\mathbf{k}\mathbf{e}^{\mathbf{i}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k})\mathbf{e}^{\mathbf{i}}. \tag{6.3.5}$$

如果系统 (6.3.4) 和 (6.3.5) 是可控的, 那么系统 (6.3.3) 也是可控的. 为使系统 (6.3.4) 和 (6.3.5) 是可控的, 需选择合适的反馈增益矩阵 $\mathbf{k}$ 使得 $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k}$ 的全部特征值的实部是负的. 根据 Lyapunov 稳定理论, 当 $t \to \infty$ 时, $\mathbf{e}^{\mathbf{r}} \to 0$ 和 $\mathbf{e}^{\mathbf{i}} \to 0$ ($\mathbf{e} = \mathbf{e}^{\mathbf{r}} + j\mathbf{e}^{\mathbf{i}} \to 0$), 驱动混沌复系统 (6.2.1) 和响应混沌复系统 (6.2.2) 实现投影同步.

显然, 误差系统可以用线性微分方程表述为

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \tag{6.3.6}$$

其中 $\mathbf{v} = -\mathbf{k}\mathbf{e}$ 是状态反馈向量. 另外, 如果可控矩阵 $[\mathbf{A}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \cdots, \mathbf{A}^{\mathbf{n}-\mathbf{1}}\mathbf{B}]$ 是满秩的, 那么混沌复系统 (6.2.2) 是驱动混沌复系统 (6.2.1) 的状态观测器, 即 $\lim_{t\to\infty} \hat{z} = \alpha z$. 甚至系统 (6.2.1) 和 (6.2.2) 的初始值在不同的吸引域内, 结论也成立.

利用极点配置技术[93, 95], 对于任意的矩阵 $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k}$ 的特征值, 可确定反馈增益矩阵 $\mathbf{k}$. 由于矩阵 $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k}$ 的特征值与标量因子 α 无关, 则标量因子 α 不影响系统 (6.3.6) 的可控性. 因此, 所提出的方法在同步的过程中可以任意调节比例因子 α, 而不用担心其它同步方法所产生的鲁棒性[90, 96].

注 6.2. 误差系统的收敛速度可以通过取矩阵 $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k}$ 的特征值进行调节, 其特征值负实部的绝对值越大, 误差的收敛速度越快, 即混沌复系统 (6.2.1) 和它的观测器 (6.2.2) 实现投影同步的速度也就越快.

6.4 仿真算例

下面我们分别以复 L$\ddot{u}$ 系统和复耦合发电机系统为例, 验证所提出的基于观测器的不确定混沌复系统投影同步算法的有效性和可行性.

6.4.1 复 L$\ddot{u}$ 系统的投影同步

2007 年, Mahmoud 等人基于混沌 L$\ddot{u}$ 系统构造了混沌复 L$\ddot{u}$ 系统, 并讨论了不同结构混沌复系统的主动控制同步和全局同步. 考虑复 L$\ddot{u}$ 系统

$$\begin{cases} \dot{z_1} &= a(z_2 - z_1), \\ \dot{z_2} &= cz_2 - z_1 z_3, \\ \dot{z_3} &= -bz_3 + \frac{1}{2}(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2), \end{cases} \tag{6.4.1}$$

其中 a, b, c 是实常数, 当 $a = 40$, $b = 5$ 和 $c = 22$, 以及初始值为 $(z_1(0),\ z_2(0),\ z_3(0)) = (3+4j,\ 3+4j,\ 5)$ 时, 系统 (6.4.1) 存在混沌吸引子, 不同投影空间的混沌吸引子和最大 Lyapunov 指数如图 4.6 所示(见第四章), 更详细的动态行为见参考文献[74].

复 L$\ddot{u}$ 系统表示为系统 (6.2.1) 的形式

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z_1 z_3 \\ \frac{1}{2}(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) \end{pmatrix}, \tag{6.4.2}$$

故知

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

和

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} -z_1 z_3 \\ \frac{1}{2}(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) \end{pmatrix}.$$

根据实现投影同步的算法, 假定混沌复系统 (6.4.2) 的输出为 $\mathbf{s}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}) + \mathbf{k}\mathbf{z}$, 其中增益矩阵 $\mathbf{k} \in R^{2\times 3}$.

设计混沌复系统 (6.4.2) 的观测器为

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{z}}_1 \\ \dot{\hat{z}}_2 \\ \dot{\hat{z}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \\ \hat{z}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{z}_1\hat{z}_3 \\ \frac{1}{2}(\bar{\hat{z}}_1\hat{z}_2 + \hat{z}_1\bar{\hat{z}}_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\alpha\mathbf{s}(\mathbf{z}) - \mathbf{s}(\hat{\mathbf{z}})). \tag{6.4.3}$$

根据混沌复系统 (6.4.2) 和它的观测器 (6.4.3), 有投影同步误差系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k})(\mathbf{e}^r + j\mathbf{e}^i) \\ &= \left(\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{k} \right) (\mathbf{e}^r + j\mathbf{e}^j), \end{aligned} \tag{6.4.4}$$

然后有

$$\dot{\mathbf{e}}^r = \left(\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{k} \right) \mathbf{e}^r \tag{6.4.5}$$

和

$$\dot{\mathbf{e}}^i = \left(\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{k} \right) \mathbf{e}^i. \tag{6.4.6}$$

显然, 矩阵 $[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}]$ 是满秩的, 故混沌复系统 (6.4.3) 是混沌复系统 (6.4.2) 的全局观测器, 即对于任意的初始值, 当 $t \to \infty$ 时, 复状态向量 $\hat{\mathbf{z}} \to \alpha\mathbf{z}$, 并且利用极点配置技术可以得到反馈增益矩阵 $\mathbf{k}$.

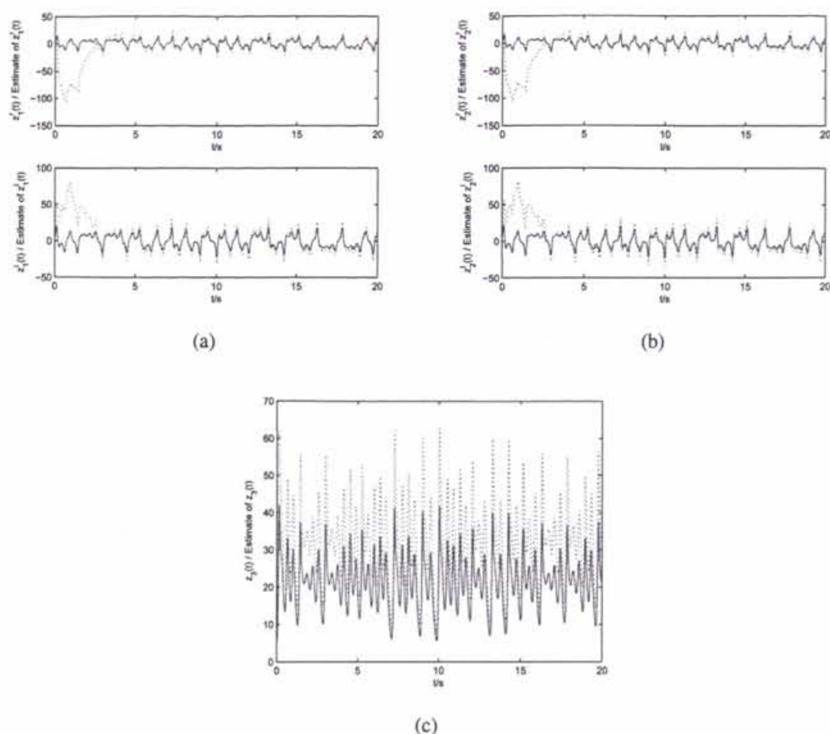


图 6.1: 当 $a=40$, $b=5$ 和 $c=22$ 时, 混沌复系统 (6.4.2) 和它的观测器 (6.4.3) 实现投影同步的情形. 实线表示混沌复系统 (6.4.2) 的实部和虚部, 而虚线表示混沌复系统 (6.4.3) 的实部和虚部.

四阶 Runge-Kutta 积分方法用于求解系统 (6.4.2), (6.4.3), (6.4.5) 和 (6.4.6). 取混沌复系统 (6.4.2) 和 (6.4.3) 的初始条件和标量因子分别为 $(z_1(0),\ z_2(0),\ z_3(0)) = (3+4j,\ 3+4j,\ 5)$, $(\hat{z}_1(0),\ \hat{z}_2(0),\ \hat{z}_3(0)) = (4+3j,\ -3+8j,\ 6)$ 和 $\alpha = 1.5$, 则误差系统 (6.4.4) 的初始值为 $(-0.5-3j,\ -7.5+2j,\ -1.5)$.

当参数取为 $a=40$, $b=5$, $c=22$ 时, 混沌复系统 (6.4.2) 存在混沌吸引子(图 4.6). 设混沌复系统 (6.4.4) 或者系统 (6.4.5) 和 (6.4.6) 的矩阵 $\mathbf{A}-\mathbf{Bk}$ 的特征值为 $(-1,\ -1,\ -1)$, 则增益矩阵 $\mathbf{k}$ 为

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 38.05 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

因此, 混沌复系统 (6.4.2) 和 (6.4.3) 的轨迹 z 和 $\hat{z}$ 实现投影同步(图 6.1). 图 6.2 展示了误差系统的状态 e_1^r, e_1^i, e_2^r, e_2^i 和 e_3 以指数形式的收敛率镇定到零点, 也

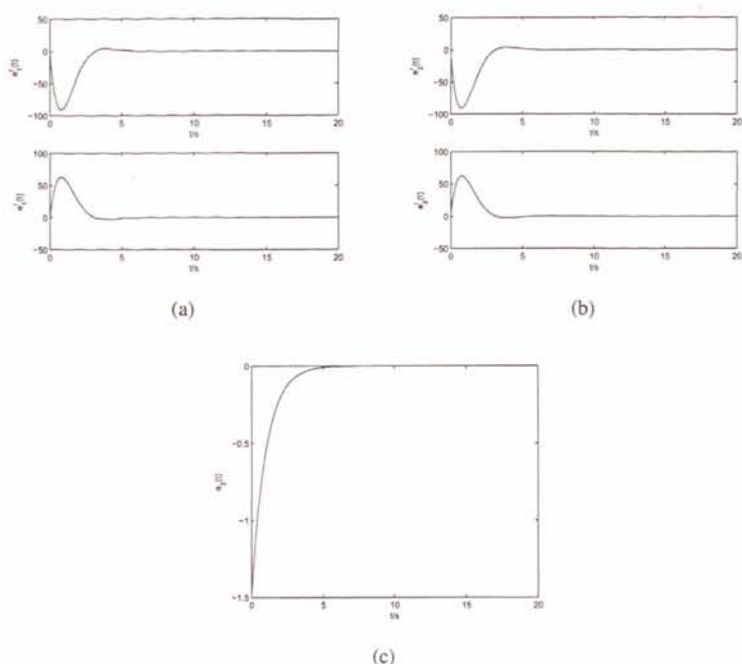


图 6.2: 当 $t \to \infty$ 时投影同步误差系统 (6.4.4) 解的实部和虚部逐渐地趋于零.

就是说基于观测器 (6.4.3) 复 Lü 系统实现了投影同步.

6.4.2 复耦合发电机系统的投影同步

复耦合发电机系统表示为

$$\begin{cases} \dot{w}_1 &= -aw_1 + a_2(w_3 + b), \\ \dot{w}_2 &= -aw_2 + w_1(w_3 - b), \\ \dot{w}_3 &= 1 - \frac{1}{2}(\bar{w}_1 w_2 + w_1 \bar{w}_2), \end{cases} \tag{6.4.7}$$

其中 a 和 b 是实常数. 当 $a = 0.8$ 和 $b = 1.8$ 时, 复耦合发电机系统有混沌吸引子(图 6.3). 复耦合发电机系统 (6.4.7) 的详细分析见参考文献[97].

同样地, 复耦合发电机系统 (6.4.7) 可表示为

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b & 0 \\ -b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 w_3 \\ w_1 w_3 \\ -\frac{1}{2}(\bar{w}_1 w_2 + w_1 \bar{w}_2) \end{pmatrix}$$

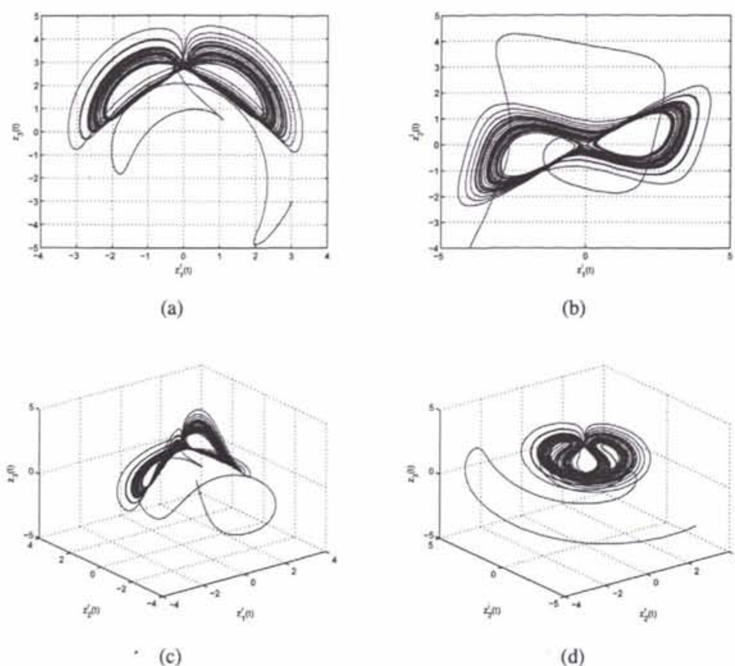


图 6.3: 当 $a = 0.8$ 和 $b = 1.8$ 时, 混沌复系统 (6.4.7) 在不同相平面和投影空间的混沌吸引子.

$$+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{6.4.8}$$

则有

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a & b & 0 \\ -b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

和

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} w_2 w_3 \\ w_1 w_3 \\ -\frac{1}{2}(\bar{w}_1 w_2 + w_1 \bar{w}_2) \end{pmatrix}.$$

假设复耦合发电机系统的输出为 $\mathbf{s}(\mathbf{w})=\mathbf{f}(\mathbf{w})+\mathbf{kw}$, 而增益矩阵 $\mathbf{k}\in R^{3\times 3}$, 则系统 (6.4.8) 的观测器为

$$\begin{pmatrix}\dot{\hat{w}}_1\\ \dot{\hat{w}}_2\\ \dot{\hat{w}}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a & b & 0\\ -b & -a & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{w}_1\\ \hat{w}_2\\ \hat{w}_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{w}_2\hat{w}_3\\ \hat{w}_1\hat{w}_3\\ -\frac{1}{2}(\bar{\hat{w}}_1\hat{w}_2+\hat{w}_1\bar{\hat{w}}_2)\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}(\alpha\mathbf{s}(\mathbf{w})-\mathbf{s}(\hat{\mathbf{w}})). \qquad (6.4.9)$$

根据投影同步误差定义, 得误差系统

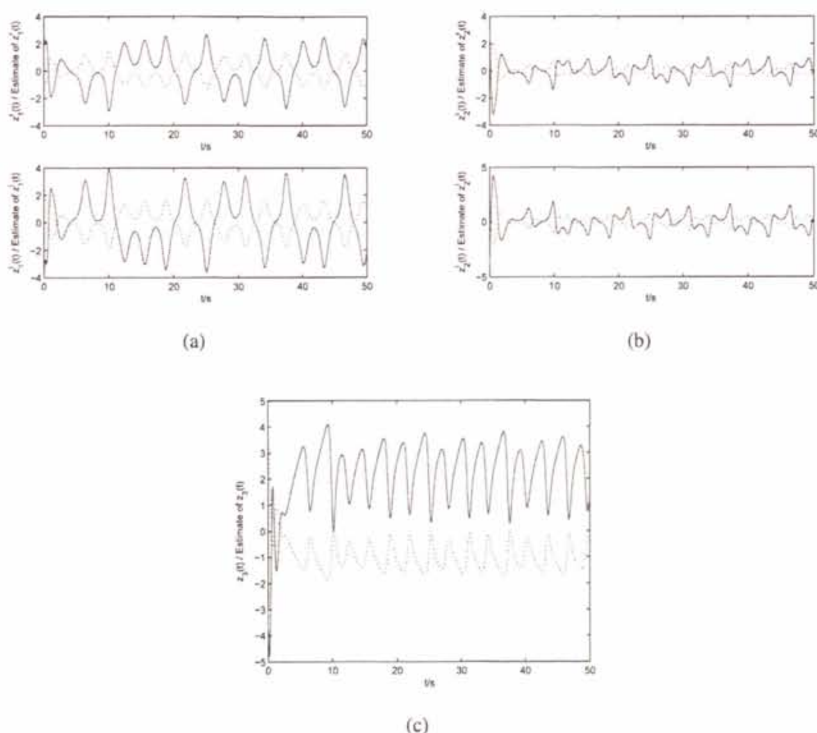


图 6.4: 复耦合发电机系统 (6.4.8) 和它的观测器 (6.4.9) 实现投影同步. 实线表示复耦合发电机系统 (6.4.8) 的实部和虚部, 而虚线表示观测器 (6.4.9) 的实部和虚部.

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}-\mathbf{Bk})(\mathbf{e}^r+j\mathbf{e}^i),$$

$$= \left(\begin{pmatrix} -a & b & 0 \\ -b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{k} \right) (\mathbf{e}^r + j\mathbf{e}^j). \quad (6.4.10)$$

由于矩阵 $[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}]$ 的秩是三且为满秩, 系统 (6.4.9) 是系统 (6.4.8) 的全

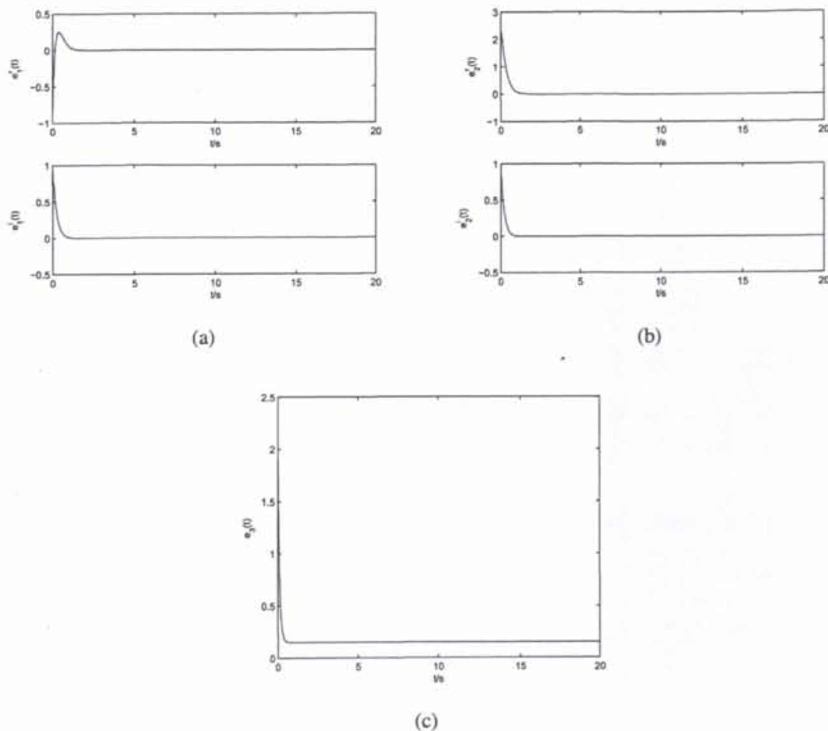


图 6.5: 当 $t \to \infty$ 时投影同步误差系统 (6.4.10) 解的实部和虚部逐渐地趋于零.

局状态观测器. 取初始值分别为 $(w_1(0), w_2(0), w_3(0)) = (3-4j, 3-4j, -3)$ 和 $(\hat{w}_1(0), \hat{w}_2(0), \hat{w}_3(0)) = (-2.5+3j, 1+3j, 4)$. 当 $\alpha = -0.5$ 时, 误差系统 (6.4.10) 的初始值为 $(-1+j, 2.5+j, 2.5)$.

设矩阵 $\mathbf{A} - \mathbf{Bk}$ 的特征值为 $(-2, -2, -2)$, 根据极点配置方法, 得到增益矩阵为

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

此矩阵使得系统 (6.4.8) 和它的观测器 (6.4.9) 实现投影同步(图 6.4 和 6.5). 当 $t \to \infty$ 时, 误差系统的状态 $e_1^r(t)$, $e_1^i(t)$, $e_2^r(t)$, $e_2^i(t)$ 和 $e_3(t)$ 渐近的趋向于零, 即在投影同步意义下系统 (6.4.9) 同步于系统 (6.4.8), 也就是说复耦合发电机系统实现了基于观测器的投影同步.

另外, 比较误差系统收敛图 6.2 和 6.5, 可见矩阵 $\mathbf{A}-\mathbf{Bk}$ 的负特征值的绝对值越大, 误差系统状态的收敛速度越快. 因此, 我们可以通过配置不同的特征值来调节误差系统的收敛速度.

6.5　$\alpha = 1$ 的特殊情形

以复耦合发电机系统为例来说明 $\alpha = 1$ 时的特殊情形, 即基于状态观测器的混沌复系统的同步问题.

假设复耦合发电机系统 (6.4.7) 的输出为 $\mathbf{s}(\mathbf{w}) = \mathbf{f}(\mathbf{w}) + \mathbf{kw}$. 当 $\alpha = 1$ 时, 观测器 (6.4.9) 变为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{\hat{w}}_1\\ \dot{\hat{w}}_2\\ \dot{\hat{w}}_3\end{pmatrix} = &\begin{pmatrix}-a & b & 0\\ -a & -b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{w}_1\\ \hat{w}_2\\ \hat{w}_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{w}_2\hat{w}_3\\ \hat{w}_1\hat{w}_3\\ -\frac{1}{2}(\bar{\hat{w}}_1\hat{w}_2 + \hat{w}_1\bar{\hat{w}}_2)\end{pmatrix}\\ &+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}(\mathbf{s}(\mathbf{w}) - \mathbf{s}(\hat{\mathbf{w}})).\end{aligned} \tag{6.5.1}$$

同样有误差系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}} &= (\mathbf{A}-\mathbf{Bk})(\mathbf{e}^r + j\mathbf{e}^i),\\ &= \left(\begin{pmatrix}-a & b & 0\\ -b & -a & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\mathbf{k}\right)(\mathbf{e}^r + j\mathbf{e}^j).\end{aligned} \tag{6.5.2}$$

显然, 同步误差系统 (6.5.2) 与投影同步误差系统 (6.4.10) 的结构是一样的. 根据复耦合发电机和其观测器的投影同步的分析, 同样可设置矩阵 $\mathbf{A}-\mathbf{Bk}$ 的特

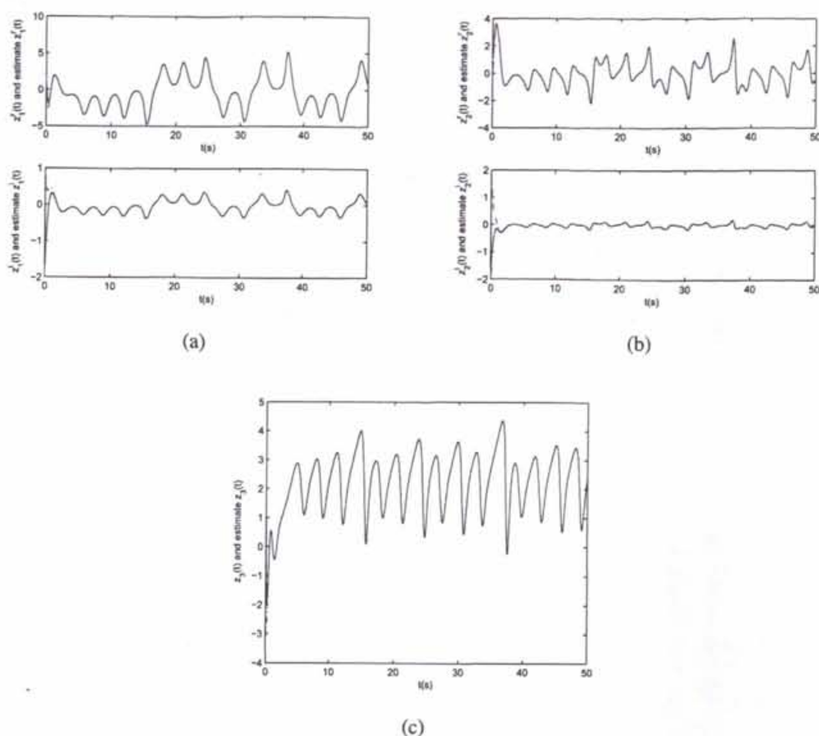
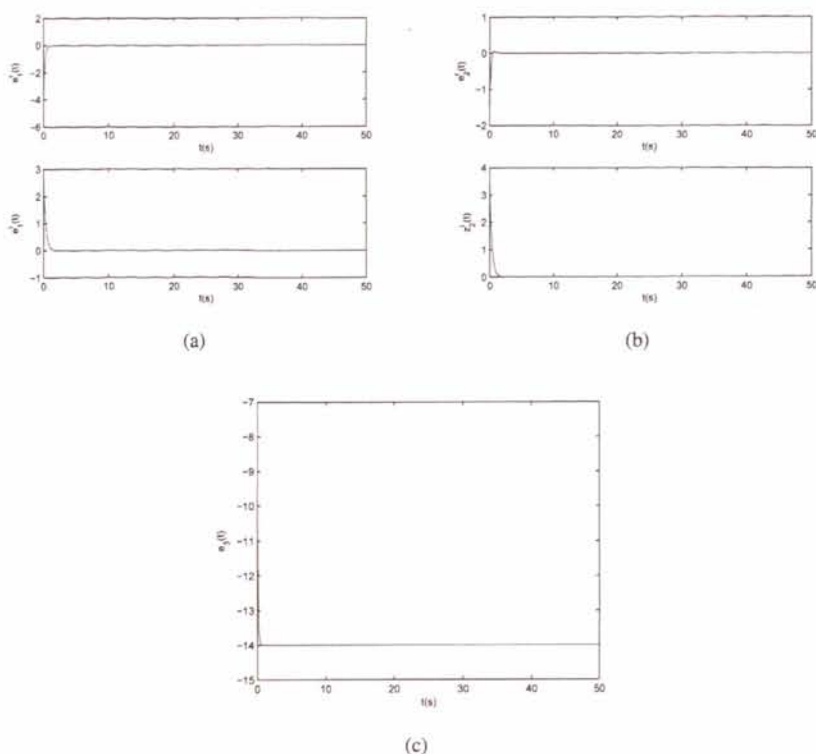


图 6.6: 当 $a=0.8$ 和 $b=1.8$ 时, 复耦合发电机系统 (6.4.7) 和其观测器 (6.5.1) 实现同步. 实线表示复耦合发电机系统 (6.4.7) 的实部和虚部, 而虚线表示观测器 (6.5.1) 的实部和虚部.

征值为 $(-2,\,-2,\,-2)$, 那么观测器 (6.5.1) 是复耦合发动机系统 (6.4.8) 的全局状态观测器. 根据极点配置技术, 可得到增益矩阵

$$\mathbf{k}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&2&0\\0&0&10\end{pmatrix}.$$

同样取系统 (6.4.8) 和其观测器 (6.5.1) 的初始值为 $(z_1(0),\,z_2(0),\,z_3(0))=(-3+1j,\,-1+2j,\,-3)$ 和 $(\hat{z}_1(0),\,\hat{z}_2(0),\,\hat{z}_3(0))=(1.5-2j,\,1-2j,\,4)$, 则误差系统 (6.5.2) 的初始值为 $(-4.5+3j,\,-2+4j,\,-7)$, 那么复耦合发电机系统 (6.4.7) 和其观测器 (6.5.1) 解的实部和虚部的同步如图 6.6. 当 $t\to\infty$ 时, 误差系统 (6.5.2) 解的实部和虚部渐近的趋向于零(图 6.7), 也就是说, 复耦合发电机系统 (6.4.8) 和它的观测器 (6.5.2) 实现同步.



(a) (b) (c)

图 6.7: 当 $t \to \infty$ 时, 误差系统 (6.5.2) 解的实部和虚部渐近趋于零.

6.6 小结

研究了不确定混沌复系统的投影同步问题. 基于假定的输出, 通过构造混沌复系统的状态观测器, 实现了一大类混沌复系统的投影同步. 通过配置误差系统的特征值, 使其投影同步误差系统渐近的收敛到零点, 可知构造的观测器是混沌复系统的全局观测器, 也就是说混沌复系统和其观测器实现投影同步. 以混沌复 $L\ddot{u}$ 系统和复耦合发电机系统为例, 说明了该方法是可行的.

同时通过选择误差系统的特征值调节投影同步的速度, 也可以通过选择投影同步的标量因子, 实现混沌复系统的状态的不同类同步, 且不影响混沌复系统的可控性. 另外, 这个方法非常简单, 因为它不需要选择和计算 Lyapunov 函数. 最后, 以复耦合发动机系统为例说明了 $\alpha = 1$ 时的情形, 即基于状态观测器的混沌复系统的同步. **本章部分内容已发表在国际期刊 International Journal of Nonlinear Science 上.**

第七章　含有扰动的混沌复系统的鲁棒自适应全状态混合投影同步

7.1　引言

全状态混合投影同步 (Full State Hybrid Projective Synchronization, 简称 FSHPS) 是最近胡等人 [98, 99] 提出来的, 是一种新的同步概念, 包含常见的完全同步[74, 84, 100]、反同步[83, 92]和投影同步[89, 90], 它具有更广泛的实用性. 最近胡和初等人分别研究了连续混沌系统和超混沌系统的 FSHPS 问题[101, 102]. 事实上, 一个现实存在的非线性混沌系统的初始条件和参数是很难确定的, 所以人们认为在实验室重构与驱动系统相同的完全同步的响应系统几乎是不可能的. 在实际应用中, 如混沌复系统的同步应用于保密通讯时, 驱动系统与响应系统的结构可能不同, 系统参数可能未知[103], 也可能存在外部的扰动, 因此研究参数未知且含有外部扰动的混沌复系统的全状态混合投影同步具有实际意义. 本章拟基于 Lyapunov 稳定性理论, 通过构造动态补偿器和采用自适应控制方法, 实现带有扰动的不确定混沌复系统的全状态混合投影同步, 从而有效地抑制了外部扰动的影响.

7.2　混沌复系统的全状态混合投影同步的定义

参考混沌实系统全状态混合投影同步的定义 [98], 下面给出混沌复系统全状态混合投影同步的定义. 考虑两个混沌复系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{H}(\mathbf{z}) \leftarrow \textit{drive system}, \\ \dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{L}(\mathbf{w}) + \mathbf{u}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \leftarrow \textit{response system}, \end{cases}$$

其中 $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \cdots, z_n]^T$ 和 $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \cdots, w_n]^T$ 是复状态向量.

定义 7.1. 如果存在一个实常数矩阵 $\mathbf{H} = diag\{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$, 使得 $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{w}(t) - \mathbf{H}\mathbf{z}(t)\| = 0$, 那么向量 $\mathbf{z}$ 同步向量 $\mathbf{w}$ 到标量矩阵 $\mathbf{H}$, 这样的同步称为全状

态混合投影同步. 同样, 矩阵 $\mathbf{H}$ 称为标量矩阵, $h_1, h_2, \cdots, h_n$ 是标量因子.

注 7.1. 当 $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 1$, $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = -1$ 和 $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = \alpha$(α 是实常数)时, 全状态混合投影同步变为完全同步、反同步和投影同步, 故完全同步、反同步和投影同步是全状态混合投影同步的特例. 特别地, 当 $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 0$ 时, 同步问题转变为混沌复系统的控制问题.

7.3 鲁棒自适应混合投影同步的实现

考虑含有外部扰动的驱动混沌复系统:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) + \mathbf{F}(\mathbf{z})\mathbf{A} + \mathbf{d}_1, \tag{7.3.1}$$

其中 $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^T \in C^n$ 是复状态向量 (T 表示转置), 且 $\mathbf{z} = \mathbf{z}^r + j\mathbf{z}^i$. 定义 $z_1 = z_1^r + jz_1^i$, $z_2 = z_2^r + jz_2^i$, $\cdots$, $z_n = z_n^r + jz_n^i$, 则 $\mathbf{z}^r = (z_1^r, z_2^r, \cdots, z_n^r)$, $\mathbf{z}^i = (z_1^i, z_2^i, \cdots, z_n^i)^T$; $\mathbf{f} : C^n \to C^n$ 是一个复向量函数, $\mathbf{F} : C^n \to C^{n\times p}$ 是一个函数矩阵, $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ 是一个实的(或者复的) 未知参数向量. $\mathbf{d}_1$ 是一个 $n \times 1$ 的矩阵, 表示外部扰动, 其元素 $d_{1l}(l = 1, 2, ..., n)$ 满足 $|h_\tau d_{1l}| \leq \rho_{1l}$, 而 h_τ 是标量矩阵 $\mathbf{H} = diag(h_1, h_2, \cdots, h_n)$ 的元素. 给定 $\rho_{1l} \in \rho_1 = [\rho_{11}, \rho_{12}, \cdots, \rho_{1n}]^T$.

含有外部扰动的响应混沌复系统

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{g}(\mathbf{w}) + \mathbf{G}(\mathbf{w})\mathbf{B} + \mathbf{u} + \mathbf{d}_2, \tag{7.3.2}$$

其中 $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \cdots, w_n]^T$ 是一个复状态向量, 且 $\mathbf{w} = \mathbf{w}^r + j\mathbf{w}^i$, $\mathbf{w}^r = (w_1^r, w_2^r, \cdots, w_n^r)$, $\mathbf{w}^i = (w_1^i, w_2^i, \cdots, w_n^i)^T$; $\mathbf{g} : C^n \to C^n$ 是一个复向量函数, $\mathbf{G} : C^n \to C^{n\times p}$ 是一个函数矩阵, $\mathbf{B} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$ 是一个实的(或者复的) 不确定参数向量, $\mathbf{u} \in C^n$ 是控制参数输入向量. $\mathbf{d}_2$ 是一个 $n \times 1$ 的矩阵, 表示外部的扰动, 其元素 $d_{2l}(l = 1, 2, ..., n)$ 满足 $|d_{2l}| \leq \rho_{2l}$, 和 $\rho_{2l} \in \rho_2 = [\rho_{21}, \rho_{22}, \cdots, \rho_{2n}]^T$.

混沌自适应全状态混合投影同步的目的是设计控制器 $\mathbf{u}$ 使得具有不同初始条件的响应混沌复系统 (7.3.2) 和驱动混沌复系统 (7.3.1) 渐近地实现 FSHPS, 则误差复向量 $\mathbf{e}=\mathbf{e}^r+j\mathbf{e}^i=\mathbf{w}-\mathbf{H}\mathbf{z}$ 将满足

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\|\mathbf{e}^r(t)\|^2 &= \lim_{t\to\infty}\|\mathbf{w}^r(t,\,\mathbf{w_0}^r)-\mathbf{H}\mathbf{z}^r(t,\,\mathbf{z_0}^r)\|^2\\ &= \lim_{t\to\infty}(\sum_{l=1}^{n}\|w_l^r(t,\,w_l^r(0))-h_lz_l^r(t,\,z_l^r(0))\|)^2\\ &= 0,\\ \lim_{t\to\infty}\|\mathbf{e}^i(t)\|^2 &= \lim_{t\to\infty}\|\mathbf{w}^i(t,\,\mathbf{w_0}^i)-\mathbf{H}\mathbf{z}^i(t,\,\mathbf{z_0}^i)\|^2\\ &= \lim_{t\to\infty}(\sum_{l=1}^{n}\|w_l^i(t,\,w_l^i(0))-h_lz_l^i(t,\,z_l^i(0))\|)^2\\ &= 0,\end{aligned}$$

即

$$\lim_{t\to\infty}\|\mathbf{e}(t)\| = \lim_{t\to\infty}\sqrt{\|\mathbf{e}^r(t)\|^2+\lim_{t\to\infty}\|\mathbf{e}^i(t)\|^2}=0,$$

其中 $\mathbf{z_0}^r=[z_1^r(0),\,z_2^r(0),\,\cdots,\,z_n^r(0)]^T$ 和 $\mathbf{z_0}^i=[z_1^i(0),\,z_2^i(0),\,\cdots,\,z_n^i(0)]^T$ 是驱动混沌复系统 (7.3.1) 的实部和虚部的初始值, $\mathbf{w_0}^r=[w_1^r(0),\,w_2^r(0),\,\cdots,\,w_n^r(0)]^T$ 和 $\mathbf{w_0}^i=[w_1^i(0),\,w_2^i(0),\,\cdots,\,w_n^i(0)]^T$ 是响应混沌复系统 (7.3.1) 的实部和虚部的初始值, 于是误差系统的实部和虚部初始值为 $\mathbf{e_0}^r=[w_1^r(0)-h_1z_1^r(0),\,w_2^r(0)-h_2z_2^r(0),\,\cdots,\,w_n^r(0)-h_nz_n^r(0)]^T$ 和 $\mathbf{e_0}^i=[w_1^i(0)-h_1z_1^i(0),\,w_2^i(0)-h_2z_2^i(0),\,\cdots,\,w_n^i(0)-h_nz_n^i(0)]^T$.

定理 7.1. 对于驱动-响应混沌复系统 (7.3.1) 和 (7.3.2), 设计控制器 $\mathbf{u}$ 为

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}^r+j\mathbf{u}^i\\ &= \mathbf{H}\mathbf{f}(\mathbf{z})+\mathbf{H}\mathbf{F}(\mathbf{z})\hat{\mathbf{A}}-\mathbf{g}(\mathbf{w})-\mathbf{G}(\mathbf{w})\hat{\mathbf{B}}-k\mathbf{e}-\delta\\ &= \mathbf{H}\mathbf{f}^r(z_1^r,\,z_1^i,\,\cdots,\,z_n^r,\,z_n^i)+\mathbf{H}\mathbf{F}^r(z_1^r,\,z_2^r,\,\cdots,\,z_n^r)\hat{\mathbf{A}}-\mathbf{g}^r(w_1^r,\,w_1^i,\,\cdots,\,w_n^r,\\ &\quad w_n^i)-\mathbf{G}^r(w_1^r,\,w_2^r,\,\cdots,\,w_n^r)\hat{\mathbf{B}}-k\mathbf{e}^r-\delta^r\\ &\quad +j(\mathbf{H}\mathbf{f}^i(z_1^r,\,z_1^i,\,\cdots,\,z_n^r,\,z_n^i)+\mathbf{H}\mathbf{F}^i(z_1^i,\,z_2^i,\,\cdots,\,z_n^i)\hat{\mathbf{A}}-\mathbf{g}^i(w_1^r,\,w_1^i,\,\cdots,\\ &\quad w_n^r,\,w_n^i)-\mathbf{G}^i(w_1^i,\,w_2^i,\,\cdots,\,w_n^i)\hat{\mathbf{B}}-k\mathbf{e}^i-\delta^i)\end{aligned}\qquad(7.3.3)$$

参数向量自适应率取为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{A}}} &= [-(\mathbf{F}^r(z_1^r, z_2^r, \cdots, z_n^r))^T\mathbf{H}, -(\mathbf{F}^i(z_1^i, z_2^i, \cdots, z_n^i))^T\mathbf{H}] \begin{bmatrix} \mathbf{e}^r \\ \mathbf{e}^i \end{bmatrix}, \\ \dot{\hat{\mathbf{B}}} &= [(\mathbf{G}^r(w_1^r, w_2^r, \cdots, w_n^r))^T, (\mathbf{G}^i(w_1^i, w_2^i, \cdots, w_n^i))^T] \begin{bmatrix} \mathbf{e}^r \\ \mathbf{e}^i \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{7.3.4}$$

和构造动态补偿器 δ 为

$$\delta = \frac{1}{2\xi}[(\rho_{11} + \rho_{21})^2 e_1, (\rho_{12} + \rho_{22})^2 e_2, \cdots, (\rho_{1n} + \rho_{2n})^2 e_n]^T, \tag{7.3.5}$$

则误差系统渐近地镇定在零平衡点附近的一个非常小的区域内, 即响应混沌复系统 (7.3.2) 和驱动混沌复系统 (7.3.1) 带着一个非常小的误差实现 *FSHPS;* 其中 $k > 0$ 是一个常数, $\hat{\mathbf{A}}$ 和 $\hat{\mathbf{B}}$ 分别为未知参数向量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的估计向量, 为了消除外部扰动的影响引入补偿器 δ.

证明: 驱动-响应混沌复系统 (7.3.1) 和 (7.3.2) 的 FSHPS 误差动力系统为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{e}}^r + j\dot{\mathbf{e}}^i \\ &= \dot{\mathbf{w}} - \mathbf{H}\dot{\mathbf{z}} \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{w}) + \mathbf{G}(\mathbf{w})\mathbf{B} + \mathbf{u} + \mathbf{d}_2 - \mathbf{H}(\mathbf{f}(\mathbf{z}) + \mathbf{F}(\mathbf{z})\mathbf{A} + \mathbf{d}_1 \\ &= \mathbf{g}^r(w_1^r, w_1^i, \cdots, w_n^r, w_n^i) + \mathbf{G}^r(w_1^r, w_2^r, \cdots, w_n^r)\mathbf{B} + \mathbf{d}_2^r - \mathbf{H}(\mathbf{f}^r(z_1^r, z_1^i, \cdots, \\ &\quad z_n^r, z_n^i) + \mathbf{F}^r(z_1^r, z_2^r, \cdots, z_n^r)\mathbf{A} + \mathbf{d}_1^r + \mathbf{u}^r \\ &\quad + j[\mathbf{g}^i(w_1^r, w_1^i, \cdots, w_n^r, w_n^i) + \mathbf{G}^i(w_1^i, w_2^i, \cdots, w_n^i)\mathbf{B} + \mathbf{d}_2^i - \mathbf{H}(\mathbf{f}^i(z_1^r, z_1^i, \\ &\quad \cdots, z_n^r, z_n^i) + \mathbf{F}^i(z_1^i, z_2^i, \cdots, z_n^i)\mathbf{A} + \mathbf{d}_1^i + \mathbf{u}^i]. \end{aligned} \tag{7.3.6}$$

将控制器 (7.3.3) 代入误差系统 (7.3.6), 并分离它们的实部和虚部有

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}^r &= -\mathbf{H}\mathbf{F}^r(z_1^r, z_2^r, \cdots, z_n^r)(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}) + \mathbf{G}^r(w_1^r, w_2^r, \cdots, w_n^r)(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}) \\ &\quad - k\mathbf{e}^r - \delta^r + \mathbf{d}_2^r - \mathbf{H}\mathbf{d}_1^r, \\ \dot{\mathbf{e}}^i &= -\mathbf{H}\mathbf{F}^i(z_1^i, z_2^i, \cdots, z_n^i)(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}) + \mathbf{G}^i(w_1^i, w_2^i, \cdots, w_n^i)(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}) \\ &\quad - \mathbf{e}^i - \delta^i + \mathbf{d}_2^i - \mathbf{H}\mathbf{d}_1^i. \end{cases} \tag{7.3.7}$$

定义参数向量误差为 $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}$ 和 $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}$.

构造 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}[(\mathbf{e}^r)^T\mathbf{e}^r + (\mathbf{e}^i)^T\mathbf{e}^i + \tilde{\mathbf{A}}^T\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}^T\tilde{\mathbf{B}}]. \tag{7.3.8}$$

计算函数 V 沿误差系统 (7.3.7) 轨道的时间导数为

$$\dot{V} = (\dot{\mathbf{e}}^r)^T\mathbf{e}^r + (\dot{\mathbf{e}}^i)^T\mathbf{e}^i - \tilde{\mathbf{A}}^T\dot{\hat{\mathbf{A}}} - \tilde{\mathbf{B}}^T\dot{\hat{\mathbf{B}}}. \tag{7.3.9}$$

将系统 (7.3.4), (7.3.5) 和 (7.3.7) 代入 (7.3.9) 有

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= (-\mathbf{HF}^r(z_1^r, z_2^r, \cdots, z_n^r)\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{G}^r(w_1^r, w_1^i, \cdots, w_n^r)\tilde{\mathbf{B}} - k\mathbf{e}^r - \delta^r + \mathbf{d}_2^r \\
&\quad - \mathbf{Hd}_1^r)^T\mathbf{e}^r + (-\mathbf{HF}^i(z_1^i, z_2^i, \cdots, z_n^i)\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{G}^i(w_1^i, w_2^i, \cdots, w_n^i)\tilde{\mathbf{B}} - k\mathbf{e}^i \\
&\quad - \delta^i + \mathbf{d}_2^i - \mathbf{Hd}_1^i)^T\mathbf{e}^i - \tilde{\mathbf{A}}^T\dot{\hat{\mathbf{A}}} - \tilde{\mathbf{B}}^T\dot{\hat{\mathbf{B}}} \\
&= -k(\mathbf{e}^{rT}\mathbf{e}^r + \mathbf{e}^{iT}\mathbf{e}^i) + (\mathbf{d}_2^r - \mathbf{Hd}_1^r - \delta^r)^T\mathbf{e}^r + (\mathbf{d}_2^i - \mathbf{Hd}_1^i - \delta^i)^T\mathbf{e}^i \\
&= -k(\mathbf{e}^{rT}\mathbf{e}^r + \mathbf{e}^{iT}\mathbf{e}^i) + (\mathbf{d}_2^r - \mathbf{Hd}_1^r)^T\mathbf{e}^r \\
&\quad - \frac{1}{2\xi}[(\rho_{11} + \rho_{21})^2e_1^r, (\rho_{12} + \rho_{22})^2e_2^r, \cdots, (\rho_{1n} + \rho_{2n})^2e_n^r]^T\mathbf{e}^r + (\mathbf{d}_2^i - \mathbf{Hd}_1^i)^T \\
&\quad \mathbf{e}^i - \frac{1}{2\xi}[(\rho_{11} + \rho_{21})^2e_1^i, (\rho_{12} + \rho_{22})^2e_2^i, \cdots, (\rho_{1n} + \rho_{2n})^2e_n^i]^T\mathbf{e}^i \\
&\quad - \frac{n\xi}{2} - \frac{n\xi}{2} + n\xi.
\end{aligned} \tag{7.3.10}$$

由于 $|h_ld_{1l}| = |h_ld_{1l}^r + jh_ld_{1l}^i| \leq \rho_{1l}$, 有 $|h_ld_{1l}^r| < |\sqrt{(h_ld_{1l}^r)^2 + (h_ld_{1l}^i)^2}| \leq \rho_{1l}$ 和 $|h_ld_{1l}^r| < \rho_{1l}$. 类似的有 $|d_{2l}^r| < \rho_{2l}$ 和 $|d_{2l}^i| < \rho_{2l}$.

又由杨不等式知

$$\frac{(\rho_{1l} + \rho_{2l})^2(e_l^r)^2}{2\xi} + \frac{\xi}{2} \geq (\rho_{1l} + \rho_{2l})|e_l^r| \geq (\rho_{1l} + \rho_{2l})e_l^r \tag{7.3.11}$$

和

$$\frac{(\rho_{1l} + \rho_{2l})^2(e_l^i)^2}{2\xi} + \frac{\xi}{2} \geq (\rho_{1l} + \rho_{2l})e_l^i. \tag{7.3.12}$$

于是

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &< -k(\mathbf{e}^{rT}\mathbf{e}^{r}+\mathbf{e}^{i^T}\mathbf{e}^{i})+(\rho_1+\rho_2)^T(\mathbf{e}^{r}+\mathbf{e}^{i})-\sum_{l=1}^{n}(\rho_{1l}+\rho_{2l})(e_l^r+e_l^i)+n\xi \\
&< -k(\mathbf{e}^{rT}\mathbf{e}^{r}+\mathbf{e}^{i^T}\mathbf{e}^{i})+n\xi. \qquad (7.3.13)
\end{aligned}
$$

若取 $(\mathbf{e}^r)^T\mathbf{e}^r+(\mathbf{e}^i)^T\mathbf{e}^i=\phi$, 则可取 k为任意的正常数. 于是取正常数 $k\geq\frac{n\xi}{\phi}$, 显然 $\dot{V}<0$. 又 $(\mathbf{e}^r)^T\mathbf{e}^r+(\mathbf{e}^i)^T\mathbf{e}^i=\phi$ 是一个不变集. 根据 Lasalle 不变集原理, 误差系统的状态渐近地镇定于一个半径为 $n\xi/k$ 的球内, 可以选择合适的 ξ 和 k 使得误差状态的界尽可能的小. 因此误差系统 (7.3.7) 将被渐近地镇定在零平衡点附近, 即 $\lim_{t\to\infty}(\|e^r\|^2+\|e^i\|^2)^{\frac{1}{2}}=\varrho$($\varrho$ 无限接近于零平衡点), 则响应混沌复系统 (7.3.2) 和驱动混沌复系统 (7.3.1) 渐近地实现 FSHPS. □

推论 7.1. *如果不含有外部扰动的驱动-响应混沌复系统 (7.3.1) 和 (7.3.2) 的结构一样, 即 $\mathbf{F}(\mathbf{z})=\mathbf{G}(\mathbf{w})$ 和 $\mathbf{f}(\mathbf{z})=\mathbf{g}(\mathbf{w})$, 那么控制器可设计为*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= [\mathbf{H}F(\mathbf{z})-\mathbf{F}(\mathbf{w})]\hat{\mathbf{A}}+\mathbf{H}\mathbf{f}(\mathbf{z})-\mathbf{f}(\mathbf{w})-k\mathbf{e}-\delta \\
&= [\mathbf{H}\mathbf{F}^r(u_1,u_3,\cdots,u_{2n-1})-\mathbf{F}^r(u_1',u_2',\cdots,u_{2n-1}')]\hat{\mathbf{A}}+\mathbf{H}\mathbf{f}^r(u_1,u_2,\cdots, \\
&\quad u_n)-\mathbf{f}^r(u_1',u_2',\cdots,u_n'-k\mathbf{e}^r-\delta^r \\
&\quad +j[(\mathbf{H}\mathbf{F}^i(u_2,u_4,\cdots,u_{2n})-\mathbf{F}^i(u_2',u_4',\cdots,u_{2n}'))\hat{\mathbf{A}}+\mathbf{H}\mathbf{f}^i(u_1,u_2,\cdots, \\
&\quad u_n)-\mathbf{f}^i(u_1',u_2',\cdots,u_n')-k\mathbf{e}^i-\delta^i], \qquad (7.3.14)
\end{aligned}
$$

其中 $k>0$ 是一个函数, 参数向量自适应率为

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{A}}} &= [\mathbf{F}^r(u_1',u_3',\cdots,u_{2n-1}')-\mathbf{H}\mathbf{F}^r(u_1,u_3,\cdots,u_{2n-1})]^T\mathbf{e}^r \\
&\quad +[\mathbf{F}^i(u_2',u_4',\cdots,u_{2n}')-\mathbf{H}\mathbf{F}^i(u_2,u_4,\cdots,u_{2n})]^T\mathbf{e}^i, \qquad (7.3.15)
\end{aligned}
$$

构造补偿器 δ 为

$$
\delta=\frac{1}{2\xi}[(\rho_{11}+\rho_{21})^2e_1,(\rho_{12}+\rho_{22})^2e_2,\cdots,(\rho_{1n}+\rho_{2n})^2e_n]^T, \qquad (7.3.16)
$$

那么两个相同结构的驱动-响应混沌复系统带着一个非常小的误差界渐近地实

现 *FSHPS*.

注 7.2. 如果参数向量 A 或者 B 的部分元素是未知的, 定理 7.1 和推论 7.1 也可以应用于实现含有外部扰动的部分参数未知的混沌复系统的 FSHPS. 特别地, 当参数矩阵 A 和 B 是已知的, 那么定理 7.1 和推论 7.1 也可以用于实现含有外部扰动的混沌复系统的 FSHPS.

注 7.3. 当 $\mathbf{z}^i = \mathbf{w}^i = \mathbf{e}^i = 0$, 控制器的设计就适应于实现不确定混沌实系统的 FSHPS.

如果 A 和 B 是复参数向量, 控制器的设计同注 6.4 的处理方法类似, 这里不再赘述. 根据注 5.4, 混沌复系统实现 FSHPS 的控制器设计对于复参数向量 A 和 B 的情形与实参数向量的情形是类似的. 为了简化计算, 以实参数向量的混沌复系统实现 FSHPS 为例, 验证所提出的鲁棒自适应 FSHPS 方法的有效性.

7.4 仿真算例

7.4.1 含有外部扰动的不同混沌复系统的 FSHPS 同步

复 Chen 混沌系统表示如下

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= a_1(z_2 - z_1), \\
\dot{z}_2 &= (a_3 - a_1)z_1 - z_1 z_3 + a_3 z_2, \\
\dot{z}_3 &= \frac{1}{2}(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) - a_2 z_3,
\end{aligned} \tag{7.4.1}$$

其中 z_1, z_2 是复状态变量, 而 z_3 是实状态复向量, a_1, a_2, a_3 是实(或者复)系统参数. 当 $a_1 = 42$, $a_2 = 4$ 和 $a_3 = 26$, 复 Chen 混沌系统 (7.4.1) 有混沌吸引子(图 7.1), 详细的动态特性分析见[74] .

复 Lü 系统如下

$$\begin{aligned}
\dot{w}_1 &= b_1(w_2 - w_1), \\
\dot{w}_2 &= -w_1 w_3 + b_3 w_2, \\
\dot{w}_3 &= \frac{1}{2}(\bar{w}_1 w_2 + w_1 \bar{w}_2) - b_2 w_3,
\end{aligned} \tag{7.4.2}$$

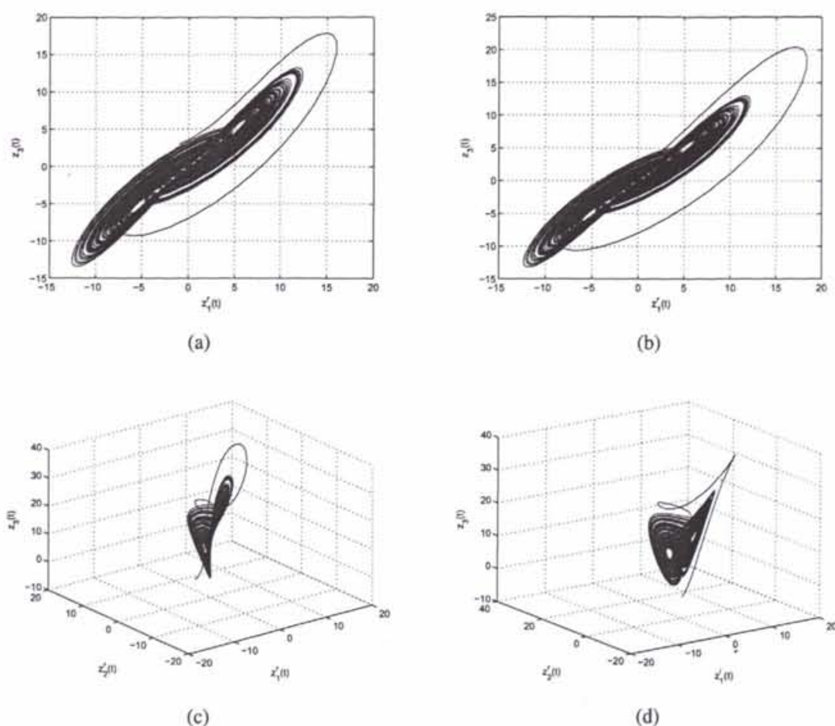


图 7.1: 在不同相平面和投影空间的复 Chen 混沌系统的混沌行为和吸引子.

其中 w_1, w_2 是复状态变量, 而 w_3 是实状态向量, b_1, b_2, b_3 是实的(或者复的) 参数. 当 $b_1 = 40$, $b_2 = 5$ 和 $b_3 = 22$, 复 L$\ddot{u}$ 系统 (7.4.2) 呈现混沌行为如图 6.1(见第六章).

假设含有外部扰动的复 Chen 混沌系统是驱动系统, 则可写为系统 (7.3.1) 的形式

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z_1 z_3 \\ \frac{1}{2}(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 - z_1 & 0 & 0 \\ -z_1 & 0 & z_1 + z_2 \\ 0 & -z_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \end{pmatrix} \tag{7.4.3}$$

其中 $\mathbf{d}_1 = [d_{11},\ d_{12},\ d_{13}]^T$ 表示外部扰动. 含有外部扰动的复 L$\ddot{u}$ 系统是响应系

统, 并表示为混沌复系统 (7.3.2) 的形式

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -w_1 w_3 \\ \frac{1}{2}(\bar{w}_1 w_2 + w_1 \bar{w}_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_2 - w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_2 \\ 0 & -w_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \tag{7.4.4}$$

其中 $\mathbf{d}_2 = [d_{21}, d_{22}, d_{23}]^T$ 表示外部的扰动, $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$ 是需要设计的控制输入变量.

根据误差向量 $\mathbf{e} = \mathbf{w} - \mathbf{Hz}$ 的定义, 有

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= b_1(w_2 - w_1) + d_{21} - h_1(a_1(z_2 - z_1) + d_{11}) + u_1, \\ \dot{e}_2 &= -w_1 w_3 + b_3 w_2 + d_{22} - h_2((a_3 - a_1)z_1 - z_1 z_3 + a_3 z_2 + d_{12}) + u_2, \\ \dot{e}_3 &= \frac{1}{2}(\bar{w}_1 w_2 + w_1 \bar{w}_2) - b_2 w_3 + d_{23} - h_3(\frac{1}{2}(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) - a_2 z_3 \\ &\quad + d_{13}) + u_3. \end{aligned} \tag{7.4.5}$$

根据定理 7.1, 设计控制器

$$\begin{aligned} u_1 &= h_1(z_2 - z_1)\hat{a}_1 - (w_2 - w_1)\hat{b}_1 - ke_1 - \frac{1}{2\xi}(\rho_{11} + \rho_{21})^2 e_1, \\ u_2 &= -h_2 z_1 z_3 - h_2 z_1 \hat{a}_1 + h_2(z_1 + z_2)\hat{a}_3 + w_1 w_3 - w_2 \hat{b}_3 - ke_2 - \frac{1}{2\xi}(\rho_{12} + \rho_{22})^2 e_2, \\ u_3 &= \frac{h_3}{2}(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) - h_3 z_3 \hat{a}_2 - \frac{1}{2}(\bar{w}_1 w_2 + w_1 \bar{w}_2) + w_3 \hat{b}_2 - ke_3 \\ &\quad - \frac{1}{2\xi}(\rho_{13} + \rho_{23})^2 e_3, \end{aligned} \tag{7.4.6}$$

其中 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3$ 分别是参数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 的估计. 参数估计的自适应率为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}}_1 &= -(z_2^r - z_1^r)h_1 e_1^r + z_1^r h_2 e_2^r - (z_2^i - z_1^i)h_1 e_1^i + z_1^i h_2 e_2^i, \\ \dot{\hat{a}}_2 &= z_3 h_3 e_3, \end{aligned}$$

$$\dot{\hat{a}}_3 = -(z_1^r + z_2^r)h_2e_2^r - (z_1^i + z_2^i)h_2e_2^i, \tag{7.4.7}$$

和

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{b}}_1 &= (w_2^r - w_1^r)e_1^r + (w_2^i - w_1^i)e_1^i, \\
\dot{\hat{b}}_2 &= w_3e_3, \\
\dot{\hat{b}}_3 &= w_2^re_2^r + w_2^ie_2^i.
\end{aligned} \tag{7.4.8}$$

因此, 不确定的混沌复系统 (7.4.3) 和 (7.4.4) 在 FSHPS 意义下渐近的同步在一个很小的界内.

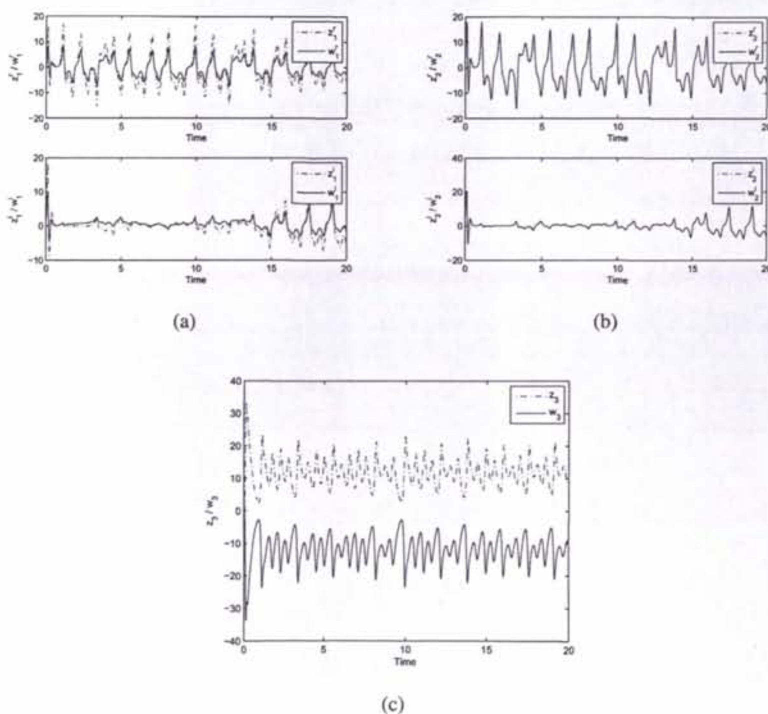
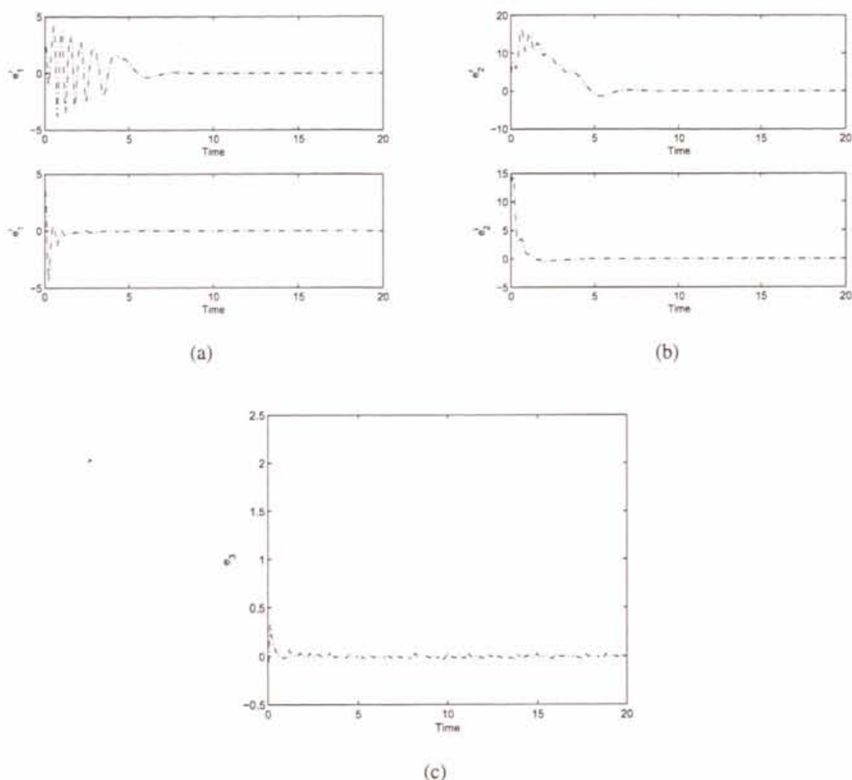


图 7.2: 在控制器 (7.4.6) 和估计的自适应律 (7.4.7) 和 (7.4.8) 作用下, 驱动-响应混沌复系统 (7.4.3) 和 (7.4.4) 实现了 FSHPS 同步.

令 $h_1 = 0.5$, $h_2 = 1$, $h_3 = -1$, 外部扰动为 $d_{11} = \sin(0.25\pi t)+j\cos(\pi t)$, $d_{12} = 0.3\sin(\pi t)+j0.5\cos(\pi t)$, $d_{13} = 0.2\sin(0.5\pi t)$ 和 $d_{21} = 0.2cos(1.5\pi t)+j0.5\sin(2\pi t)$, $d_{22} = 0.5\sin(0.5\pi t) + j0.3\sin(\pi t)$, $d_{23} = 0.8\sin(1.5\pi t)$, 则 $\rho_{11} = 1$, $\rho_{12} =$

0.8, $\rho_{13} = 0.2$ 和 $\rho_{21} = 0.7$, $\rho_{22} = 0.8$, $\rho_{23} = 0.8$. 取未知参数为 $a_1 = 42$, $a_2 = 4$, $a_3 = 26$ 和 $b_1 = 40$, $b_2 = 5$, $b_3 = 22$, 则混沌复 Chen 和 L$\ddot{u}$ 系统有混沌吸引子. 取驱动混沌复系统 (7.4.3) 和响应混沌复系统 (7.4.4) 的初始值分别



(a)　(b)

(c)

图 7.3: 驱动-响应混沌复系统 (7.4.3) 和 (7.4.4) 的误差动态.

为 $z_1(0) = -1 + 2j$, $z_2(0) = 3 + 5j$, $z_3(0) = -4$ 和 $w_1(0) = 5 + 4j$, $w_2(0) = 2 + 3j$, $w_3(0) = 0.5$, 则误差系统 (7.4.5) 的初始值为 $e_1(0) = 5.5 + 3j$, $e_2(0) = -1 + 0.5j$, $e_3(0) = 2.5$. 取系统参数估计的初始值为 $\hat{a}_1(0) = 20$, $\hat{a}_2(0) = 15$, $\hat{a}_3(0) = 20$ 和 $\hat{b}_1(0) = 20$, $\hat{b}_2(0) = 10$, $\hat{b}_3(0) = 15$, 并取 $k = 2$ 和 $\xi = 0.001$. 仿真结果如图 7.2-7.5 所示. 图 7.2(a-c)展现了混沌复系统 (7.4.3) 和 (7.4.4) 的复状态的实部和虚部的时间响应实现 FSHPS 同步, 图 7.3(a-c)显示了 FSHPS 误差系统状态的实部和虚部的响应渐近的收敛到 0 附近, 图 7.4 和 7.5 是系统未知参数的估计的时间变化图, 当 $t \to \infty$ 时未知参数的估计分别的收敛到相应的确定值.

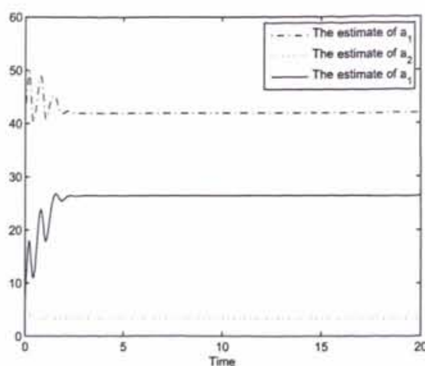


图 7.4: 参数估计 $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ 和 $\hat{a}_3$ 的变化图.

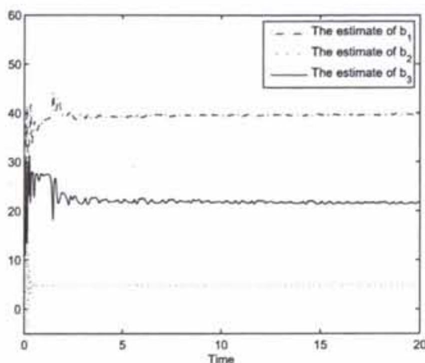


图 7.5: 参数估计 $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$ 和 $\hat{b}_3$ 的变化图.

7.4.2 含有外部扰动的相同超混沌复系统的 FSHPS 同步

以超混沌复 Lorenz 系统[104]为例, 说明含有外部扰动的两个相同超混沌复系统的 FSHPS. 假设复变量 **z** 的超混沌复 Lorenz 系统为驱动系统, 而复变量 **w** 的超混沌复 Lorenz 系统为响应系统, 那么驱动-响应超混沌复系统分别表示为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a_1(z_2 - z_1) + jz_4 + d_{11}, \\ \dot{z}_2 = a_2 z_1 - z_2 - z_1 z_3 + jz_4 + d_{12}, \\ \dot{z}_3 = -a_3 z_3 + (1/2)(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) + d_{13}, \\ \dot{z}_4 = -a_4 z_4 + (1/2)(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) + d_{14}, \end{cases} \tag{7.4.9}$$

其中 z_1, z_2 是复变量, z_3, z_4 是实变量, a_1, a_2, a_3, a_4 是实(或者复) 的参数,

$\mathbf{d}_1 = [d_{11}, d_{12}, d_{13}]^T$ 表示外部扰动;

和

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = a_1(w_2 - w_1) + jw_4 + d_{21} + u_1, \\ \dot{w}_2 = a_2 w_1 - w_2 - w_1 w_3 + jw_4 + d_{22} + u_2, \\ \dot{w}_3 = -a_3 w_3 + (1/2)(\bar{z}_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2) + d_{23} + u_3, \\ \dot{w}_4 = -a_4 w_4 + (1/2)(\bar{z}_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2) + d_{24} + u_4, \end{cases} \tag{7.4.10}$$

其中 $\mathbf{d}_2 = [d_{21}, d_{22}, d_{23}]^T$ 也表示外部扰动, 另外 $\mathbf{v} = [u_1, u_2, u_3]^T$ 是需要设计的控制输入.

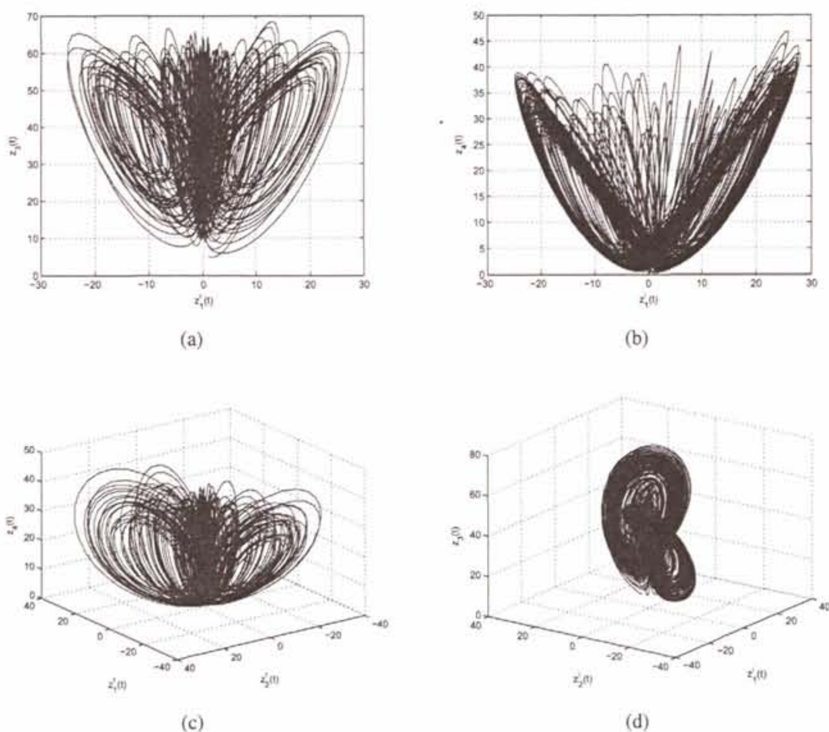


图 7.6: 超混沌复 Lorenz 系统在不同相平面和投影空间的超混沌行为和超混沌吸引子.

根据推论 7.1, 设计控制器

$$\mathbf{v} = [\mathbf{H}F(\mathbf{z}) - \mathbf{F}(\mathbf{w})]\hat{\mathbf{A}} + \mathbf{H}\mathbf{f}(\mathbf{z}) - \mathbf{f}(\mathbf{w}) - k\mathbf{e} - \delta$$

$$
= \begin{pmatrix} [h_1(z_2-z_1)-(w_2-w_1)]\hat{a}_1 + j(h_1 z_4 - w_4) - ke_1 - \frac{1}{2\xi}(\rho_{11}+\rho_{21})^2 e_1 \\ (h_2 z_1 - w_1)\hat{a}_2 - (z_2 + z_1 z_3 - j z_4)h_2 + w_2 + w_1 w_3 - j w_4 - ke_2 - \frac{1}{2\xi}(\rho_{12}+\rho_{22})^2 e_2 \\ (w_3 - h_3 z_3)\hat{a}_3 + \frac{1}{2}h_3(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) + \frac{1}{2}(\bar{w}_1 w_2 + w_1 \bar{w}_2) - ke_3 - \frac{1}{2\xi}(\rho_{13}+\rho_{23})^2 e_3 \\ (w_4 - h_4 z_4)\hat{a}_4 + \frac{1}{2}h_4(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) + \frac{1}{2}(\bar{w}_1 w_2 + w_1 \bar{w}_2) - ke_4 - \frac{1}{2\xi}(\rho_{14}+\rho_{24})^2 e_3 \end{pmatrix} \tag{7.4.11}
$$

和未知参数的自适应率

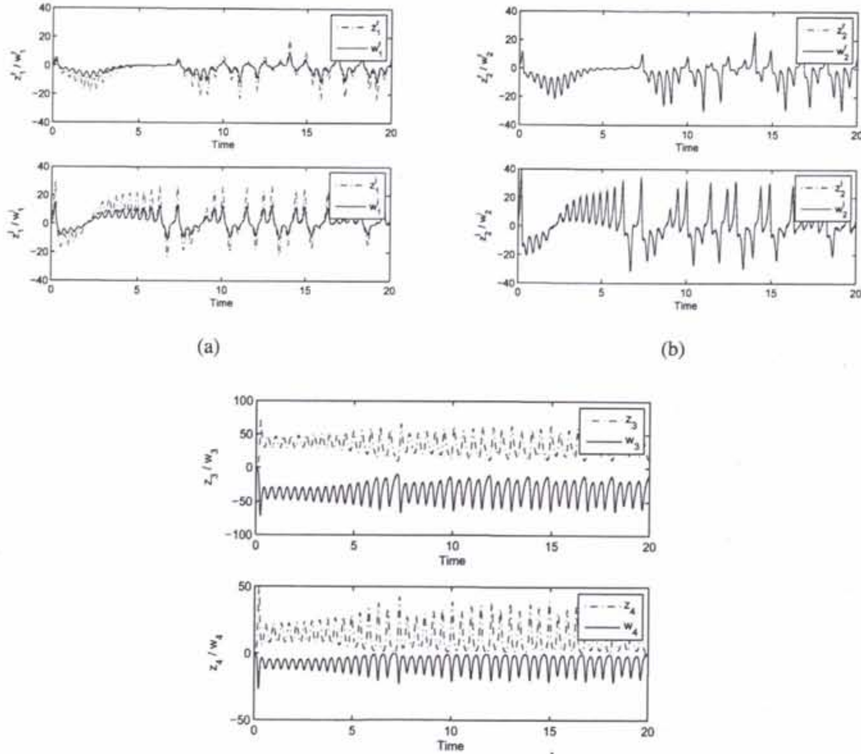


图 7.7: 两个相同含有外部扰动的超混沌复 Lorenz 系统实现 FSHPS.

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{A}}} &= [\mathbf{F}^r(w_1^r, w_2^r, \cdots, w_n^r) - \mathbf{H}\mathbf{F}^r(z_1^r, z_2^r, \cdots, z_n^r)]^T \mathbf{e}^r \\
&\quad + [\mathbf{F}^i(w_1^r, w_2^r, \cdots, w_n^r) - \mathbf{H}\mathbf{F}^i(w_1^i, w_2^i, \cdots, w_n^i)]^T \mathbf{e}^i \\
&= \begin{pmatrix} [(w_2^r - w_1^r) - h_1(z_2^r - z_1^r)]e_1^r + [(w_2^i - w_1^i) - h_1(z_2^i - z_1^i)]e_2^i \\ (w_1^r - h_2 z_1^r)e_2^r + (w_1^i - h_2 z_1^i)e_2^i \\ (h_3 z_3 - w_3)e_3 \\ (h_4 z_4 - w_4)e_4 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{7.4.12}
$$

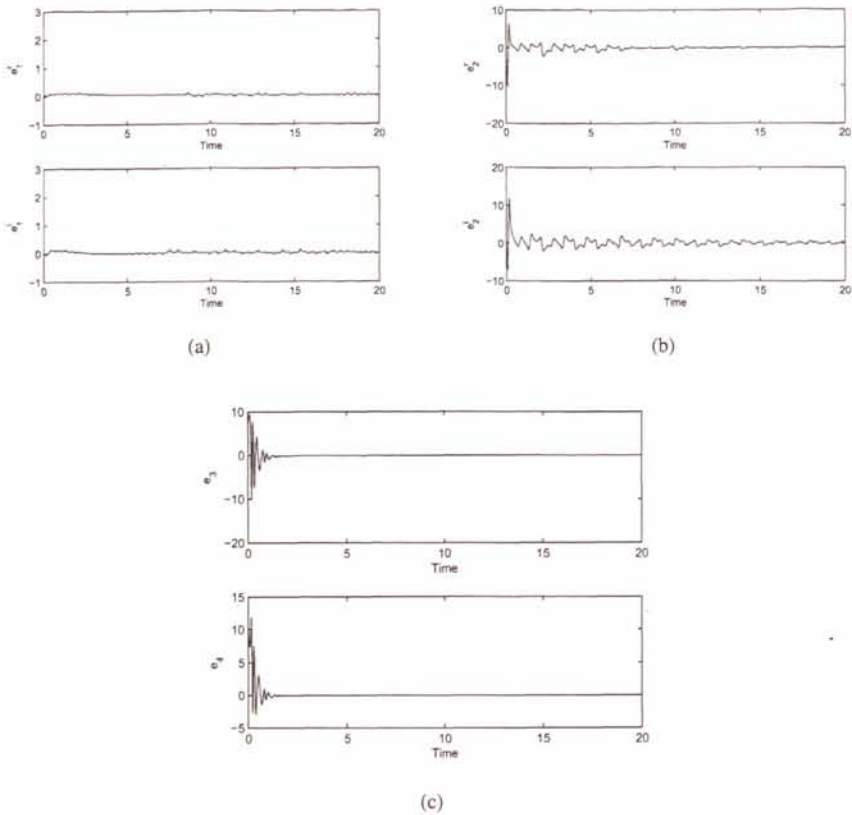


图 7.8: 驱动-响应超混沌复 Lorenz 系统 (7.4.9) 和 (7.4.10) 的 FSHPS 误差.

在仿真中, 取标量因子和外部扰动分别为 $h_1 = 0.5$, $h_2 = 1$, $h_3 = -1$, $h_4 = -0.5$ 和 $d_{11} = \sin(0.25\pi t) + j\cos(\pi t)$, $d_{12} = 0.3\sin(\pi t) + j0.5\cos(\pi t)$, $d_{13} = 0.2\sin(0.5\pi t)$, $d_{14} = 0.5\cos(0.5\pi t)$, $d_{21} = 0.2cos(1.5\pi t) + j0.5\sin(2\pi t)$, $d_{22} = 0.5\sin(0.5\pi t) + j0.3\sin(\pi t)$, $d_{23} = 0.8\sin(1.5\pi t)$, $d_{24} = 0.3\cos(0.3\pi t)$, 于是得到 $\rho_{11} = 1$, $\rho_{12} = 0.8$, $\rho_{13} = 0.2$, $\rho_{14} = 0.25$ 和 $\rho_{21} = 0.7$, $\rho_{22} = 0.8$, $\rho_{23} = 0.8$, $\rho_{24} = 0.3$. 取未知参数为 $a_1 = 14$, $a_2 = 40$, $a_3 = 5$ 和 $a_4 = 13$, 超混沌复 Lorenz 系统有超混沌吸引子(图 7.6).

取驱动-响应超混沌复 Lorenz 系统 (7.4.9) 和 (7.4.10) 的初始值分别为 $z_1(0) = 1 + 2j$, $z_2(0) = 3 + 4j$, $z_3(0) = 5$, $z_4(0) = 6$ 和 $w_1(0) = 5 + 4j$, $w_2(0) = 2 + 3j$, $w_3(0) = 6$, $w_4(0) = 1$. 参数估计的初始值为 $\hat{a}_1(0) = 20$, $\hat{a}_2(0) = 15$, $\hat{a}_3(0) = 20$ 和 $\hat{a}_4(0) = 15$. 另外, 取 $k = 1.5$ 和 $\xi = 0.1$. 驱动-响应超混沌复

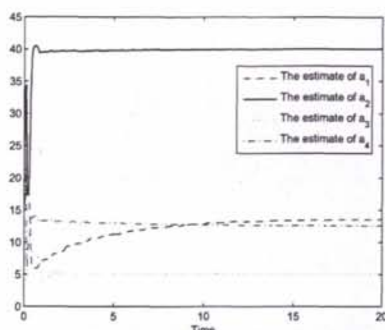


图 7.9: 未知参数估计 $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$ 和 $\hat{a}_4$ 随时间的变化图.

Lorenz 系统 (7.4.9) 和 (7.4.10) 的实部与虚部状态的时间响应实现了 FSHPS 如图 7.7 所示, 可见两个超混沌复系统在 FSHPS 意义下实现渐近同步. 驱动-响应超混沌复系统 (7.4.9) 和 (7.4.10) 的 FSHPS 误差动态的时间响应如图 7.8 所示, 可见 FSHPS 误差很快地收敛到零点附近. 未知参数的估计随时间变化如图 7.9 所示, 可见参数的估计很快收敛到相应的确定常值.

7.5 小结

研究了含有外部扰动和未知参数的混沌复系统的鲁棒自适应全状态混合投影同步. 基于自适应控制和 Lyapunov 稳定理论, 通过构造动态补偿器, 给出了一个新的同步控制器设计方法, 从而有效地抑制了外部扰动的影响. 同时给出了未知参数的自适应律, 所设计的控制器同样可以抑制未知参数的影响. 该方法设计简单, 可以容易地解决其他类型的混沌复系统的全状态混合投影同步问题, 无需试凑. 最后以复 Chen 系统和复 Lü 系统以及两个相同结构的超混沌复 Lorenz 系统的自适应全状态混合投影同步为例, 验证了该方法的正确性.

另外, 完全同步、反同步、部分同步和投影同步都包含于全状态混合投影同步中, 可见本章研究内容极大的促进了混沌同步研究的深入.

第八章　总结

混沌与分形理论是当前非线性科学的研究热点, 而 Julia 集作为分形理论中的经典集合, 是复解析动力系统的主要研究对象, 表现出明显的混沌特性. 含有复变量的混沌复系统是目前关注的热点之一, 而混沌复系统的同步在保密通信、激光控制等领域的应用中展示了广阔的应用前景. 本论文围绕 Julia 集和混沌复系统展开了研究, 显示出以复动力系统为基础的空间分形集的多变性和复杂性, 以及混沌复系统的控制与同步的必要性.

首先给出了耦合映像格子模型的空间 Julia 集的基本理论, 利用梯度控制、最优函数控制和辅助参考控制方法, 通过控制不动平面的稳定性, 实现了对耦合映像格子模型的空间 Julia 集的有效控制. 利用这些控制方法实现了不同耦合映像格子模型的空间 Julia 集的轨迹同步, 进而实现了不同耦合映像格子模型的空间 Julia 集的同步. 这些控制方法在实现空间 Julia 集的控制和同步过程中的成功应用, 对进一步研究空间分形和解释复杂的现象具有重要的理论意义.

进一步给出了空间混沌 Julia 集的概念和稳定区域, 利用反馈控制的方法实现了空间混沌 Julia 集稳定区域的控制, 进而实现空间混沌 Julia 集的控制. 给出了空间混沌 Julia 集广义同步的定义, 并利用线性反馈和非线性反馈的方法分别实现了空间混沌 Julia 集的线性和非线性广义同步.

最后对混沌复系统的同步进行了系统的研究. 首先构造了一个新的复类 Lorenz 系统, 分析了它的混沌行为, 并利用主动控制和反馈控制的方法实现了反同步, 并对这两种方法实现复类 Lorenz 系统的反同步进行了比较. 在此基础上, 首次研究了含有未知参数的混沌复系统的反同步, 设计了自适应反同步控制器, 给出了反同步控制器及参数自适应律的解析式, 并讨论了此方法也适用于参数为复变量的混沌复系统的自适应反同步. 接着, 又研究了不确定混沌复系统的投影同步, 通过构造混沌复系统的状态观测器, 利用极点配置方法实现混沌复系统的投影同步. 最后, 提出了混沌复系统的一般同步的概念, 即全状态

混合投影同步, 并研究了含有外部扰动和未知参数的混沌复系统的鲁棒自适应全状态混合投影同步. 基于自适应控制技术和 Lyapunov 稳定理论, 通过构造动态补偿器, 给出了一个新的全状态混合投影同步控制器的设计方法, 从而有效地抑制了外部扰动的影响.

当然, 空间分形理论包含着非常丰富的内容, 针对不同的实际情况会有不同的控制关系, 需要不同的控制目标, 使得控制系统按照实际的需要实现其控制. 本论文只考虑了参数已知情况下的耦合映像格子模型的空间 Julia 集的控制与同步, 而对于未知参数的情况没有涉及. 另外, 实际模型一般处于比较复杂的环境中, 常常受到外界的干扰, 例如噪声, 抑制外部噪声对耦合映像格子模型的空间 Julia 集和空间混沌 Julia 集的影响, 是需要解决的问题. 在处理混沌复系统的同步过程中都是采用实虚部分离的方式, 利用实系统的 Lyapunov 稳定理论设计其控制器, 对混沌复系统的控制与同步有一定的限制. 完善复系统的 Lyapunov 稳定性判定理论, 可以为混沌复系统的控制提供更有利的工具.

总之, 本论文推动了空间分形理论和混沌理论的深入研究, 而且为促进通讯安全技术的发展奠定了理论基础, 为数字产品安全系统的设计提供了更多的思路和手段. 同时, 希望有兴趣的同行们积极地参与到这一领域中来, 使空间分形和混沌复系统理论及其控制与同步逐步加以完善.

参考文献

[1] R. M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics[J]. Nature, 1976, 261: 459–467.

[2] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: solution of the Fatou - Julia problem on wandering domains[J]. Annals of Mathematics, 1985, 122: 401–418.

[3] H. O. Peitgen, P. H. Richter, The beauty of fractals[M]. Berlin: Springer, 1986.

[4] A. Lakhtakia, V. V. Varadan, R. Messier, V. K. Varadan, On the symmetries of the Julia sets for the process $z \Leftarrow z^p + c$[J]. Journal of Physics. A. Mathematical and General, 1987, 20: 3533–3537.

[5] U. Gujar, V. Bhavsar, N. Vangala, Fractal images from $z \leftarrow z^\alpha + c$ in the complex z-plane[J]. Computers and Graphics, 1992, 16: 45–49.

[6] E. Lau, D. Schleicher, Symmetries of fractals revisited[J]. The mathematical intelligencer, 1996, 18(1): 45–51.

[7] P. Niamsup, Julia Sets of Certain Exponential Functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2000, 250: 598–609.

[8] X. Wang, Q. Liang, Reverse bifurcation and fractal of the compound logistic map[J]. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 2008, 13: 913–927.

[9] M. Rani, R. Agarwal, Generation of fractals from complex logistic map[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 42: 447–452.

[10] C. Beck, Physical meaning for Mandelbrot and Julia sets[J]. Physica D, 1999, 3-4: 171–82.

[11] R. Rammal, Spectrum of harmonic excitations on fractals[J]. J. Phys. (Paris), 1984, 45:191–206.

[12] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, B. I. Shraiman, Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets[J]. Phys. Rev. A, 1986, 33: 1141–1151.

[13] X. Y. Wang, Q. Y. Meng, Study on the physical meaning for generalized Mandelbrot-Julia sets based on the Langevin problem[J]. Acta Phys. Sin., 2004, 53: 388–395.

[14] A. Noton, Generation and display of geometric fractals in 3-D[J]. Comput. Graph., 1982, 16: 61-67.

[15] A. Norton, Julia sets in the quatemions[J]. Computers and Graphics, 1989, 13: 267-278.

[16] J. Holbrook, Quaternionic Fatou-Julia sets[J]. Annals of Science and Math Quebec, 1987, 11: 79–94.

[17] J. Gomatam, J. Doyle, B. Steves, I. Mcfarlane, Generalization of the Mandelbrot set: quaternionic quadratic maps[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 1995 5: 971–986.

[18] Y. Zhang, S. Liu, Gradient control and synchronization of Julia sets[J]. Chin. Phys. B, 2008, 17: 543–549.

[19] Y. Zhang, S. Liu, W. Sun, Feedback control in fractal mechanics[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 40: 337–343.

[20] P. Liu, S. Liu, Control and synchronization of Julia sets in coupled map lattice[J]. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 2011, 16: 3344–3355.

[21] K. Falconer, Fractals geometry-mathematical foundations and applications[M]. Wiley, Hoboken, 1990.

[22] G. Chen, J. L. Moiola, H. O. Wang, Bifurcation control: theories, methods, and applications[J]. Int. J. Bifurcation and Chaos, 2000, 10: 511–548.

[23] M. Henon, A two-dimensional mapping with a strange attractor[J]. Commun. Math. Phys., 1976, 50: 69–77.

[24] S. Liu, G. Chen, On spatial lyapunov exponents and spatial chaos[J]. Int. J. Bifurcation and Chaos, 2003, 13: 1163–1181.

[25] E. A. Jackson, A. Hübler, Periodic entrainment of chaotic logistic map dynamics[J]. Physica D, 1990, 44: 407–420.

[26] E. P. Borges, C. Tsallis, G. F. J. Ananos, P. M. C. Oliveira, Nonequilibrium probabilistic dynamics of the logistic map at the edge of chaos[J]. Phys. Rev. Lett., 2002, 89: 103–106.

[27] Y. Bistritz, Stability testing of 2-D discrete linear systems by telepolation of immittance-type tabular test[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. I, 2001, 48: 840–846.

[28] F. R. Marotto, Chaotic behavior in the henon mapping[J]. Commun. Math. Phys., 1979, 68: 187–194.

[29] S. Liu, G. Chen, Asymptotic behavior of delay 2-D discrete logistic systems[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. I, 2002, 40: 1677–1682.

[30] J. F. Nye, Glacier sliding without cavitation in a linear viscous approximation[J]. Royal Society of London Proceedings Series A, 1970, 315: 381–403.

[31] D. C. Leslie, Developments in the Theory of turbulence[M]. Clarendon Press, oxford, 1973.

[32] R. C. Ball, D. A. Weitz, T. A. Witten, F. Leyvraz, Universal kinetics in reaction-limited aggregation[J]. Phys. Rev. Lett., 1987, 58: 274–277.

[33] T. Viesek, Fractal Growth Phenomena[M]. World Scientific press, San Francisco, 1989.

[34] C. J. Evertsz, Fractal geometry of financial time series[J]. Fractals, 1995, 3: 609–616.

[35] A. L. Goldberger, L. A. Amaral, J. M. Hausdorff, P. C. Ivanov, C. K. Peng, H. E. Stanley, Fractal dynamics in physiology: Alterations with disease and aging[C]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2002, 99: 2466–2472.

[36] Y. P. Zhang, S. T. Liu, S. L. Shen, Fractals control in particle's velocity[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 39: 1811–1816.

[37] 张丽, 刘树堂, 薄板热扩散分形生长的环境干扰控制[J]. 物理学报, 2010, 59: 7708–7712.

[38] T. A. Witten, L. M. Sander, A kinetic critical phenomenon[J]. Phys. Rev. Lett., 1981, 47: 1400–14003.

[39] T. A. Witten, L. M. Sander, Diffusion-limited aggregation[J]. Phys. Rev. Lett., 1983, 27: 5686–5697.

[40] S. F. Ascencio, H. P. Meana, M. N. Miyatake, A three dimensional growth model for primary cancer[J]. Physics and Engineering of Millimeter and Sub-Millimeter Waves, 2001, 1: 241–243.

[41] W. T. Gintz, Aritist's Statement CQUAT-A non-distributive quad Algebra for 3-D Renderings of Mandelbrot and Julia sets[J]. Comput. Graph., 2002, 26: 367–370.

[42] H. Takayuki, S. Takashi, I. Keisuke, Fractal structure of spatial distribution of microfracturing in rock[J]. Kyklos, 2007,52: 369–374.

[43] K. Knaeko, Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative system[D]. Ph. D. dissertation, 1983.

[44] K. Kaneko, Spatio-temporal intemritteney in coupled map lattiees[J]. Prog. Theor Phys., 1985, 74: 1033–1044.

[45] K. Kaneko, Pattern competition Intermittency and selective flicker noise in Spatio-temporal chaos[J]. Phys. Lett., 1987, 125: 2531–2726.

[46] K. Kaneko, Pattern Dynamics in Spatiotemporal Chaos, Pattern Selection, Diffusion of Defect and Pattern Competition Intermittency[J]. Physica, 1989, 34: 1–41.

[47] V. M. de Sousa, A. J. Lichtenberg, Controlling chaos using nonlinear feedback with delay[J]. Phys. Rev. E, 1996, 54:1200–1208.

[48] R. E. Amritkar, P. M. Gade, A. D. Gangal, V. M. Nandkumaran, Stability of periodic orbits of coupled-map lattices[J]. Phys. Rev. A, 1991, 44: 3407–3410.

[49] A. Tamasevicius, Reproducible analogue circuit for chaotic synchronization[J]. Electron Letter, 1997, 33: 1105–1106.

[50] B. Blasius, A. Huppert, L. Stone, Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological systems[J]. Nature, 1999, 399: 354–359.

[51] Z. M. Ge, T. C. Yu, Y. S. Chen, Chaos synchronization of a horizontal platform system[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 268: 731–749.

[52] F. Han, Q. Lu, M. Wiercigroch, Q. Ji, Chaotic burst synchronization in heterogeneous small-world neuronal network with noise[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2009, 44: 298–303.

[53] L. D. Stephen, L. S. Kevin, P. B. Robert, Generation and graphical analysis of Mandelbrot and Julia sets in more than four dimensions[J]. Comput. Graph., 1996, 20: 451–456.

[54] J. Cheng, J. Tan, Generalization of 3-D Mandelbrot and Julia sets, J. Zhejiang Univ. Sci. A, 2007, 8: 134–141.

[55] X. Y. Wang, Y. Y. Sun, The general quaternionic M-J sets on the mapping $z \leftarrow z^{\alpha} + c\,(\alpha \in N)$[J]. Comput. Math. Appl., 2007, 53: 1718–1732.

[56] 刘树堂. 2-D 离散动力系统混沌控制与同步[D]. 华南理工大学博士学位论文, 2002.

[57] S. Liu, S. Wu, Y. P. Zhang, Uniformity and spatial chaos of spatial physics kinematic system[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2006, 16(9): 2697–2703.

[58] 隋首钢. 复动力系统的空间分形 Julia 集. 山东大学硕士学位论文, 2005.

[59] Y. Zhang, Y. Fan, Generalized synchronization of Julia sets[J]. Control Theory and Applications, 2009, 26: 463–467.

[60] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Synchronization in chaotic systems[J]. Phys. Rev. Letter, 1990, 64: 821–824.

[61] Y. Zhang, J. Sun, Chaotic synchronization and anti-synchronization based on suitable separation[J]. Phys. Lett. A, 2004, 330: 442–447.

[62] S. Celikovsky, G. Chen, Secure synchronization of a class of chaotic systems from a nonlinear observer approach[J]. IEEE Trans. Autom. Control, 2005, 50: 76–82.

[63] Y. Chen, X. X. Chen, S. S. Gu, Lag synchronization of structurally nonequivalent chaotic systems with time delays[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2007, 66: 1929–1937.

[64] G. H. Erjaee, S. Momani, Phase synchronization in fractional differential chaotic systems[J]. Phys. Lett. A, 2008, 372: 2350–2354.

[65] X. Liang, J. Zhang, X. Xia, Adaptive synchronization for generalized lorenz systems[J]. IEEE Trans. Autom. Control, 2008, 53: 1740–1746.

[66] J. Lu, J. Cao, D. W. C. Ho, Adaptive stabilization and synchronization for chaotic lur'e systems with time-varying delay[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. I, 2008, 55: 1347–1355.

[67] W. Li, X. Chen, Z. Shen, Anti-synchronization of two different chaotic systems[J]. Physica A, 2008, 387: 3747–3750.

[68] K. Li, M. Zhao, X. Fu, Projective synchronization of driving - response systems and its application to secure communication[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. I, 2009, 56: 2280–2291.

[69] G. M. Mahmoud, A. A. Mohamed, S. A. Aly, Strange attractors and chaos control in periodically forced complex Duffing's oscillators[J]. Physica A, 2001, 292: 193–206.

[70] Y. Xu, W. Xu, G. M. Mahmoud, On a complex Duffing system with random excitation[J]. Chaos, Solitons and Fractal, 2005, 23: 399–411.

[71] Y. Xu, G. M. Mahmoud, W. Xu, Y. Lei, Suppressing chaos of a complex Duffing's system using a random phase[J]. Chaos, Solitons and Fractal, 2005, 3: 265–273.

[72] A. Rauh, L. Hannibal, N. Abraham, Global stability properties of the complex Lorenz model[J]. Physica D, 1996, 99: 45–58.

[73] A. C. Fowler, J. D. Gibbon, M. T. Mc Guinnes, The real and complex Lorenz equations and their relevance to physical systems[J]. Physica D, 1983, 7: 126–134.

[74] G. M. Mahmoud, T. Bountis, E. E. Mahmoud, Active control and global synchronization for complex Chen and *Lü* systems[J]. Int. J. Bifurcation and Chaos, 2007, 17: 4295–4308.

[75] G. M. Mahmoud, T. Bountis, G. M. AbdEl-Latif, E. E. Mahmoud, Chaos synchronization of two different complex Chen and *Lü* systems[J]. Nonlinear Dyn., 2009, 55: 43–53.

[76] J. Z. Wang, Z. Q. Chen, Z. Z. Yuan, A new chaotic system and analysis of its properties[J]. Acta Phys. Sin., 2006, 55: 3956-3963.

[77] J. Xu, G. Cai, Adaptive backstepping control of new chaotic system[J]. Journal of Jiangsu University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2007, 21: 86-89.

[78] J. Xu, G. Cai, Nonlinear feedback synchronization of new chaotic system[J]. Journal of Jiangsu University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2008, 22: 86-90.

[79] A. Wolf, J. Swift, H. Swinney, J. Vastano. Determining Lyapunov exponents from a time series[J]. Physica D, 1985, 16: 285-317.

[80] J. Lü, G. Chen, S. Zhang, S. Celikovsky, Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system[J]. Int. J. Bifurcation and Chaos, 2002, 12: 2917–2926.

[81] G. M. Mahmoud, S. A. Aly, M. A. Al-Kashif, Dynamical properties and chaos synchronization of a new chaotic complex nonlinear system[J]. Nonlinear Dyn., 2008, 51: 171–181.

[82] G. M. Mahmoud, E. E. Mahmoud, Phase and antiphase synchronization of two identical hyperchaotic complex nonlinear systems[J]. Nonlinear Dyn., 2010, 61: 141–152.

[83] P. Liu, S. Liu, Anti-synchronization between different chaotic complex systems[J]. Physica scripta, 2011, 83: 5006-5015.

[84] G. M. Mahmoud, E. E. Mahmoud, Complete synchronization of chaotic complex nonlinear systems with uncertain parameters[J]. Nonlinear Dyn., 2010, 62: 875–882.

[85] G. M. Mahmoud, M. A. Al-Kashif, S. A. Aly, Basic properties and chaotic synchronization of complex Lorenz system[J]. Int. J. Modern Phys. C, 2007, 18: 253–265.

[86] L. Kocarev, U. Parlitz, General approach for chaotic synchronization with applications to communication[J]. Phys. Rev. Lett., 1995, 74: 5028–5031.

[87] U. Parlitz, T. Stojanovski, H. Preckel, Encoding messages using chaotic synchronization[J]. Phys. Rev. E, 1996, 53: 4351–4361.

[88] G. Alvarez, S. Li, F. Montoya, G. Pastor, M. Romera, Breaking a secure communication scheme based on the phase synchronization of chaotic systems[J]. Chaos, 2004, 14: 274–277.

[89] R. Mainieri, J. Rehacek, Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems[J]. Phys. Rev. Lett., 1999, 82: 3042–3045.

[90] D. Xu, Control of projective synchronization in chaotic systems[J]. Phys. Rev. E, 2001, 63: 27201–27204.

[91] Y. Chen, X. X. Chen, S. S. Gu, Lag synchronization of structurally nonequivalent chaotic systems with time delays[J]. Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., 2007, 66: 1929–1937.

[92] S. Liu, P. Liu, Adaptive anti-synchronization of chaotic complex nonlinear systems with unknown parameters[J]. Nonlinear Anal. Real World Applications, 2011, 12: 3046–3055.

[93] H. Nijmeijer, I. Mareels, An observer looks at synchronization[J]. IEEE Trans. Circ. Syst. I, 1997, 44(10): 882–890.

[94] T. L. Liao, N. S. Huang, An observer based approach for chaotic synchronization and secure communication[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. I, 1999, 46(9): 1144–1150.

[95] P. N. Paraskevopoulos, Modern control engineering[M]. New York: Marcel Dekker, 2002.

[96] D. Xu, Z. Li, S. Bishop, R. Steven, Manipulating the scaling factor of projective synchronization in three-dimensional chaotic systems[J]. Chaos, 2001, 11(9): 439–442.

[97] G. M. Mahmoud, M. A. Al-Kashif, S. A. Aly, On chaos synchronization of a complex two coupled dynamos system[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 33(1): 178–187.

[98] M. Hu, Z. Xu, R. Zhang, A. Hu, Parameters identification and adaptive full state hybrid projective synchronization of chaotic (hyper-chaotic) systems[J] . Phys. Letts A, 2007, 361: 231–237.

[99] G. Li, Modified projective synchronization of chaotic system[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 32: 1786–1790.

[100] P. Liu, S. Liu, Observer-Based Synchronization of Chaotic Complex Systems[J]. International Journal of Nonlinear Science, 2011, 12: 405-412.

[101] M. Hu, Z. Xu, R. Zhang, Full state hybrid projective synchronization in continuous-time chaotic (hyperchaotic) systems[J]. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 2008, 13: 456–464.

[102] Y. Chu, Y. X Chang, J. G. Zhang, X. F. Li, X. L. An, Full state hybrid projective synchronization in hyperchaotic systems[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 42: 1502–1510.

[103] P. Liu, S. Liu, Adaptive modified function projective synchronization of general uncertain chaotic complex systems[J]. Physica scripta, 2012, 85: 035005-035015.

[104] G. M. Mahmoud, E. E. Mahmoud, Synchronization and control of hyperchaotic complex Lorenz system[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2010, 80: 2286–2296.

致 谢

本论文的研究工作是在导师刘树堂教授的精心指导和帮助下完成的, 从论文的选题、研究方案的确定, 到最后论文的撰写和修改, 无不凝聚着导师的大量心血. 导师严谨的治学态度、渊博的知识、敏捷的思维和对学术研究孜孜不倦的开拓创新精神以及他那长者的风范和博大胸襟都将使我在人生道路上终生受益, 激励着我在学术研究中积极进取、努力探索. 导师还在生活上给予莫大的关心和帮助. 在此论文完成之际, 衷心感谢导师刘树堂教授.

感谢硕士阶段导师刘允刚教授, 导师孜孜不倦的教诲, 引导我对学术研究产生了浓厚兴趣. 导师殷勤的期望、无微不至的关怀和无私的支持使我在前进的道路上不再彷徨.

感谢山东大学控制科学与工程学院为我提供了良好的学习环境, 感谢学院各位老师的关心、支持和鼓励.

感谢实验室蒋沅、张丽、孙洁、刘坚、梁峰、张芳芳、高文远、刘克新、王培、余伟勇等师兄师姐师弟师妹们的无私帮助和支持. 在与他们共同奋斗的岁月里, 就许多学术问题进行了讨论, 不仅使我开阔了思路, 提高了解决问题的能力, 而且结下了深厚的友谊. 有了他们的相伴, 校园生活变得轻松而愉快.

深深感谢我的父母, 正是他们的默默奉献, 才换来了我今日的收获. 父母的爱, 将是我永远进取的源泉.

感谢我的先生李祥一直以来的支持、理解和鼓励, 在生活上悉心照顾, 在学术上共同探讨. 他的深情厚爱, 是我永远的坚强后盾.

最后, 再次感谢所有关心、帮助、支持过我的人!

攻读博士学位期间完成的论文和参与的项目

发表的期刊论文

1. Ping Liu and Shutang Liu. Control and synchronization of Julia sets in coupled map lattice, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011, 16(8): 3344-3355 (SCI: 000289601700040; EI).
2. Shutang Liu and Ping Liu. Adaptive anti-synchronization of chaotic complex nonlinear systems with unknown parameters, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2011, 12(6): 3046-3055 (SCI: 00029523290011; EI).
3. Ping Liu and Shutang Liu. Anti-synchronization between different chaotic complex systems, Physica Scripta, 2011, 83(6): 065006-065015(SCI: 00029115 3700006; EI).
4. Ping Liu and Changan Liu. Linear Generalized Synchronization of Spatial Julia Sets, International Journal of Bifurcation and Chaos, 2011, 21(5): 1281-1291 (SCI: 000292512400003; EI).
5. Ping Liu and Shutang Liu. Adaptive modified function projective synchronization of general uncertain chaotic complex systems. Physica scripta, 2012, 85(3): 035005-035015 (SCI: 000301342000006; EI).
6. Ping Liu and Shutang Liu. Control and coupling synchronization of Julia sets in coupled map lattice, Indian Journal of physics (Proofed) (SCI;EI).
7. Ping Liu and Shutang Liu. Observer-Based Synchronization of Chaotic Complex Systems. International Journal of Nonlinear Science, 2011, 12(4): 405-412.
8. Shutang Liu, Yuan Jiang and Ping Liu. Rejection of nonharmonic disturbances in nonlinear system. Kybernetika, 2010, 46(5): 785-798 (SCI: 000285771400 001; EI).

发表的会议论文

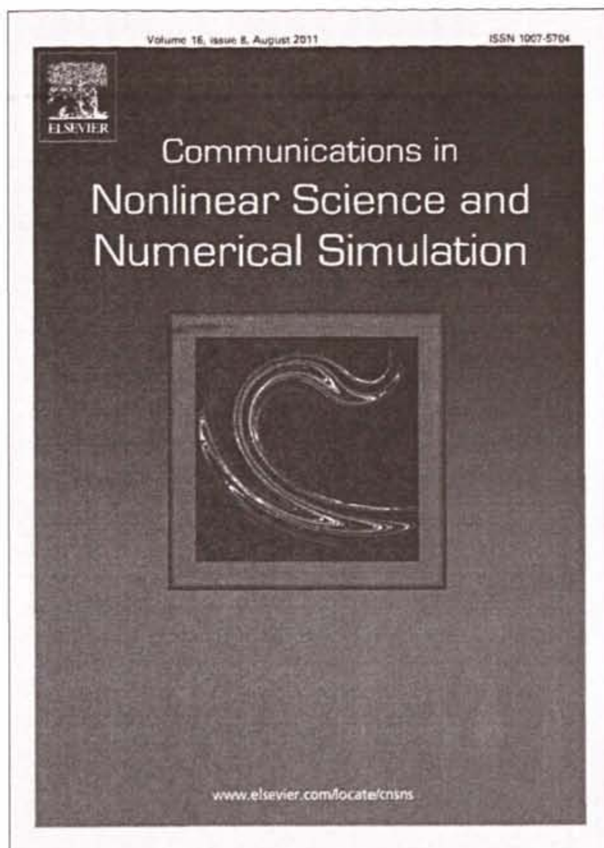
1. Ping Liu, Shutang Liu and Xiang Li. On noise of Julia sets in coupled map lattice. The Fourth International Workshop on Chaos-Fractals Theories and Applications, 2011, 412-415 (EI:12407785).

已投的论文

1. Ping Liu and Shutang Liu. Robust adaptive full state hybrid synchronization of chaotic complex systems with unknown parameters and external disturbances, Nonlinear Dynamics (Minor Revised).
2. Ping Liu and Shutang Liu. Generalized Julia set in coupled map lattice and its coupling and synchronization, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (Under Review).
3. Ping Liu and Shutang Liu. Hybrid projective synchronization of complex Duffing-Holmes oscillators, Journal of The Franklin Institute: Engineering and Applied Mathematics (Under Review).
4. Ping Liu and Shutang Liu. Adaptive reduced and added order hybrid function projective synchronization of general chaotic complex systems with fully unknown parameters, IEEE Transactions on Circuits and Systems I (Submitted).

参与的项目

1. 全国百篇优秀博士论文专项基金(200444)
2. 国家自然科学基金项目“分形控制及其应用”(60874009)
3. 国家自然科学基金项目“分子轨道的混沌和分岔控制”(10971120)
4. 山东省自然科学基金项目“海洋藻类凝聚分形生长的定区域控制与应用”(ZR 2010FM010)

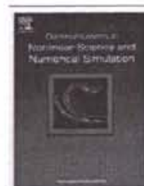

Volume 16, issue 8, August 2011
ISSN 1007-5704
ELSEVIER
Communications in
Nonlinear Science and
Numerical Simulation
www.elsevier.com/locate/cnsns

Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 16 (2011) 3344–3355

Contents lists available at ScienceDirect

Commun Nonlinear Sci Numer Simulat

journal homepage: www.elsevier.com/locate/cnsns



Control and synchronization of Julia sets in coupled map lattice

Ping Liu *, Shutang Liu

College of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, PR China

ARTICLE INFO

Article history:
Received 9 July 2010
Accepted 12 November 2010
Available online 18 November 2010

Keywords:
Julia sets in coupled map lattice
Gradient control
Optimal control
Synchronization

ABSTRACT

In this paper, we achieve the control and synchronization of Julia sets in coupled map lattice using gradient control and optimal control respectively. The control of the Julia sets is accomplished by controlling the stable space of the fixed plane. Moreover, the synchronization of two different Julia sets is also accomplished by their trajectories synchronization. To verify the feasibility of these control methods, we consider the Julia sets, whose lattice length is two, as examples to achieve their control and synchronization using different methods respectively. The numerical simulations are also shown to illustrate the effectiveness of these control methods.

1. Introduction

In the 1970s, French mathematician Gaston Julia [1] studied the simple iterative map $z_{n+1} \leftarrow z_n^2 + c$ in complex plane and obtained the beautiful fractal sets, namely, Julia sets. In recent years, there have been a lot of developments in Julia sets, including qualitative characters, applications and controls. Lakhtakia et al. [2] examined the self-replicating properties of the Julia sets $J_c(p)$ for the iterative processes $z \leftarrow z^p + c$ for integers $p > 1$ and showed the symmetries of the Julia sets $J_c(p)$. The physical meaning for Julia sets was provided by studying the motion of a particle in double-well potential [3]. Wang and Meng [4] discussed the physical meaning of Julia sets based on the particle dynamics characteristics and found that the change law of the particle's velocity can be reflected visually by the fractal construction characteristics of generalized Julia sets. The controls of Julia sets in complex plane were investigated by utilizing feedback, synchronization, coupling and so on [5,6].

In 1982, Alan Norton [7] displayed the spatial Julia sets in 4-D quaternions by the boundary tracking method firstly. Later the spatial Julia sets has been received extensive investigations. Hart et al. [8] obtained a deterministic 3-D Julia set by the ray tracing. The 3-D Julia sets are produced based on customized complexified quaternion [9]. Sui [10] constructed the Julia sets in coupled map lattice and gave its some properties. Moreover, many people are also interested in the structures and interior properties of the spatial Julia sets. Bogush et al. [11] investigated some algebraic and geometrical properties of 3-D Julia sets by means of the group analysis theory. The properties of the generalized quadratic Julia sets was also analyzed [12].

It is noted that the spatial Julia sets has been developed in the drawing of the graphics, the qualitative characters and the theory. However, the control of the spatial Julia sets is more less. Therefore, we discuss the control and synchronization of Julia sets in coupled map lattice by applying gradient control and optimal control in this paper.

In next Section, we introduce the definitions and properties of the Julia sets in coupled map lattice and give two corollaries about the stable space and the fixed plane, respectively. In Section 3, we discuss the control of the Julia sets using the gradient control and optimal control and also give the simulations about the control of the Julia sets, whose lattice length

* Corresponding author.
E-mail address: Liupingshd@126.com (P. Liu).

1007-5704/$ - see front matter © 2010 Elsevier B.V. All rights reserved.
doi:10.1016/j.cnsns.2010.11.008

is two. In Section 4, the definition of the synchronization between two different Julia sets in coupled map lattice is given and the synchronization are also discussed using different methods. The simulations of the synchronization between two different Julia sets are also given. Finally, the conclusions are given in Section 5.

2. The basic theories of the Julia sets in coupled map lattice

The following coupled map lattice system is introduced firstly,

$$x_{n+1}(i) = (1-\varepsilon)f(x_n(i)) + \frac{\varepsilon}{2}[f(x_n(i-1)) + f(x_n(i+1))], \tag{1}$$

where n is the discrete time index, i is the lattice site, $i = 1, 2, \dots, N$, with N being the system size. ε is a coupling strength, and $\varepsilon \in [0, 1]$ is a real constant. In general, the periodic boundary condition, $x_n(0) = x_n(N)$, is assumed.

It is well known that the Julia sets is created by the iteration of a complex variable function. In order to obtain the Julia sets in coupled map lattice, the system (1) is generalized to the complex plane as follows

$$z_{n+1}(i) = (1-\varepsilon)f(z_n(i)) + \frac{\varepsilon}{2}[f(z_n(i-1)) + f(z_n(i+1))], \tag{2}$$

where $f(\cdot)$ is a nonlinear function in complex plane and the periodic boundary condition, $z_n(0) = z_n(N)$, is taken. In this paper, we take $f(z) = z^2 + c$, which is the classic complex quadratic polynomial. Hence, the system (2) reduces to

$$z_{n+1}(i) = (1-\varepsilon)z_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}\left(z_n^2(i-1) + z_n^2(i+1)\right) + c. \tag{3}$$

It is clear that the Julia sets in coupled map lattice is formed by the iteration of the system (3). For simplicity, the Julia sets of the system (3) is called CML Julia sets.

The simulation figure of the classic Julia sets, which is obtained by the iteration of one function in z plane, is 2-D. Moreover, the CML Julia sets is created by the iteration of N initialization states, so it posses N state variables. The high dimensional Julia sets is created by investigating the state variable which is placed in two coordinates. Therefore, the CML Julia sets can be simulated by a 2^N-dimensional figure.

We recall the following basic concepts and conclusions, which will be helpful for the main results in next sections [10,13].

Definition 1. A state vector $[z_n(1), z_n(2), \dots, z_n(i), \dots, z_n(N)]$ is said to be a repelling periodic state vector of the system (3), if the state vector $[z_n(1), z_n(2), \dots, z_n(i), \dots, z_n(N)]$ of the system (3) shows the periodic and repelling properties in the iterative process.

Definition 2. The closure of the repelling periodic state vector is called a Julia set in coupled map lattice.

Definition 3. If w is a attractive fixed point of $g(\cdot)$, the attractive domain is

$$A(w) = \{z \in C : g^s(z) \to w, (s \to \infty)\},$$

where $g(\cdot)$ is a function with one variable and s is the iterative times.

Lemma 1. *The periodic state vector $[z_n(1), z_n(2), \dots, z_n(i), \dots, z_n(N)]$ of the system (3) is a repelling periodic state vector if and only if $|f'(z_n(i))| > 1$ for every $i = 1, 2, \dots, N$.*

Lemma 2. *If w is a attractive fixed point, then*

$$\partial A(w) = J(g),$$

where ∂A denotes the boundary of the attractive domain A and J denotes a Julia set.

We obtain the following corollaries from above basic theories.

Corollary 1. *If ϱ is a stable fixed plane, the stable space is*

$$S(\varrho) = \{z(i) \in C : F^{(t)}(z(i)) \to \varrho, (t \to \infty)\},$$

where $F(\cdot)$ is a complex function about $z(i)$ and t is the iterative times.

Corollary 2. *If ϱ is a stable fixed plane, then*

$$\partial S(\varrho) = J_s(F),$$

where ∂S denotes the boundary of the stable space S and J_s denotes a spatial Julia set.

From the definition of the CML Julia sets and the above lemmas and corollaries, the control of the CML Julia sets can be obtained by controlling the iterative trajectory of state vectors. Moreover, the control of the iterative trajectory can be achieved by accomplishing the stability of the fixed plane. Hence, we achieve the control of the CML Julia sets via controlling the stability of the fixed plane.

3. Control of the Julia sets in coupled map lattice

As we mentioned in above section, we consider the stable problem of the fixed plane $z^*(i) = \frac{1\pm\sqrt{1-4c}}{2}$ of the system (3) to achieve the control of the CML Julia sets. In other words, we are able to find a controlling item $u_n(i)$ to ensure that the fixed plane z^* of the following controlled system (4) is stable,

$$z_{n+1}(i) = (1-\varepsilon)z_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}\left(z_n^2(i-1) + z_n^2(i+1)\right) + c + u_n(i). \tag{4}$$

Furthermore, $z(i)_{n+1} \to z^*(i)$, as $n \to \infty$. Hence, we can achieve the control of the CML Julia sets by controlling the trajectory of the CML Julia sets.

Next, we discuss the control of the CML Julia sets by using different methods.

3.1. The gradient control

In this subsection, we accomplish the control of the CML Julia sets by using the gradient control [6], so the controlling item $u_n = -\frac{k}{1+k}(z_{n+1}(i) - z^*(i))$ is taken. Then, the controlled system (4) reduces to

$$z_{n+1}(i) = \frac{1}{1+k}\left[(1-\varepsilon)z_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1) + z_n^2(i+1)) + c\right] + \frac{k}{1+k}z^*(i), \quad i = 1, 2\cdots, N. \tag{5}$$

It is clear that $z^*(i)$ is also the fixed plane of the system (5). According to Corollary 2, we can achieve the control of the trajectory of the CML Julia sets via controlling the stability of the fixed plane of the controlled system (5). Therefore, we consider the problem of stability of the fixed plane as follows. Denote

$$F(z(i)) = \frac{1}{1+k}\left[(1-\varepsilon)z^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(z^2(i-1) + z^2(i+1)) + c\right] + \frac{k}{1+k}z^*(i), \quad i = 1, 2\cdots, N. \tag{6}$$

The Jacobin matrix J_F of $F(z(i))$ is given by

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{2(1-\varepsilon)}{1+k}z(1) & \frac{\varepsilon}{1+k}z(2) & \cdots & \frac{\varepsilon}{1+k}z(N) \\ \frac{\varepsilon}{1+k}z(1) & \frac{2(1-\varepsilon)}{1+k}z(2) & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{1+k}z(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & (1-k)\varepsilon z(N) \\ \frac{\varepsilon}{1+k}z(1) & 0 & \cdots & \frac{2(1-\varepsilon)}{1+k}z(N) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

where J_F is an $N \times N$ matrix. From the periodic boundary condition $z_n(0) = z_n(N)$ and the Jacobin matrix J_F, the homogeneous solution of the matrix J_F is a circulant matrix [14]. Thus, the matrix J_F can be diagonalized by a fourier matrix. We take the fourier matrix $G_{N\times N}$, then the diagonal matrix $\widehat{J}_F$ of J_F is

$$\widehat{J}_F = G^{-1}J_F G.$$

The elements of $\widehat{J}_F$ is

$$\widehat{J}_F(l,l) = \frac{2}{1+k}(1-\varepsilon)z(l) + \frac{2}{1+k}\varepsilon z(l)\cos(\theta_l), \tag{8}$$

where $\theta_l = \frac{2\pi l}{N}$, $l = 1, 2, \ldots, N$. It is noted that the stability condition of the fixed plane of the controlled system (5) is the eigenvalues of J_F at the fixed plane within the unit circle in complex plane. According to (8), the module of eigenvalues of J_F at the fixed plane are bounded between $\left|\frac{2}{1+k}(1-2\varepsilon)z^*\right|$ and $\left|\frac{2}{1+k}z^*\right|$. Hence, the fixed plane z^* of the controlled system (5) should satisfy $\left|\frac{2}{1+k}(1-2\varepsilon)z^*\right| < 1$ and $\left|\frac{2}{1+k}z^*\right| < 1$.

Take $z^* = z^*(i) = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$ for simplicity, we get

$$\left|\frac{2}{1+k}(1-2\varepsilon)\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}\right| = \left|\frac{1}{1+k}(1-2\varepsilon)(1-\sqrt{1-4c})\right| < 1 \tag{9}$$

and

$$\left|\frac{2}{1+k}\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}\right| = \left|\frac{1}{1+k}(1-\sqrt{1-4c})\right| < 1. \tag{10}$$

From (9) and (10), we obtain

$$|1+k| > |(1-\sqrt{1-4c})(1-2\varepsilon)|$$

and

$$|1+k| > |1-\sqrt{1-4c}|.$$

Thus, the range of the control parameter k is

$$|1+k| > \max\left\{\left|(1-\sqrt{1-4c})(1-2\varepsilon)\right|, \left|1-\sqrt{1-4c}\right|\right\}. \tag{11}$$

Therefore, we can choose appropriate k to control the trajectory of CML Julia sets, so as to achieve the control of the CML Julia sets.

As we mentioned in the previous section, the CML Julia sets can be simulated by a 2^N-dimensional figure. It increases the complexity of simulating the CML Julia sets and runs short of the intuition. In order to void those troubles, we take the lattice length of the system (3) as two, as an example, to illustrate the control of the CML Julia sets. Hence, the controlled systems (5) reduce to

$$\begin{cases} z_{n+1}(1) = \frac{1}{1+k}\left[(1-\varepsilon)z_n^2(1) + \varepsilon z_n^2(2) + c\right] + \frac{k}{1+k}z^*(1), \\ z_{n+1}(2) = \frac{1}{1+k}\left[(1-\varepsilon)z_n^2(2) + \varepsilon z_n^2(1) + c\right] + \frac{k}{1+k}z^*(2). \end{cases} \tag{12}$$

Also, the Eq. (6) becomes

$$F(z(i)) = \frac{1}{1+k}\left[(1-\varepsilon)z^2(i) + \varepsilon(z^2(i+1) + c\right] + \frac{k}{1+k}z^*(i), \quad i = 1,2. \tag{13}$$

Based on the periodic boundary condition $z(1) = z(3)$, we have

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{2(1-\varepsilon)}{1+k}z(1) & \frac{2\varepsilon}{1+k}z(2) \\ \frac{2\varepsilon}{1+k}z(1) & \frac{2(1-\varepsilon)}{1+k}z(2) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Hence, the diagonal matrix $\widehat{J}_F$ of J_F is

$$\widehat{J}_F = \begin{pmatrix} \frac{2(1-2\varepsilon)}{1+k}z(1) & 0 \\ 0 & \frac{2}{1+k}z(2) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

From (15), the eigenvalues of J_F are $\lambda_1 = \frac{2(1-2\varepsilon)}{1+k}z(1)$ and $\lambda_2 = \frac{2}{1+k}z(2)$. Hence, we have $|\lambda_1| = \left|\frac{2(1-2\varepsilon)}{1+k}z^*(1)\right| < 1$ and $|\lambda_2| = \left|\frac{2}{1+k}z^*(2)\right| < 1$ according to the stability condition of the fixed plane. Therefore, we obtain the range of control parameter k to satisfy the stability of the fixed plane $z^*(i) = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$, $i = 1,2$ for the controlled system (12).

When we take $\varepsilon = 0.4$ and $c = -0.2 + 0.1i$, then the k satisfies $k \in \{k < -1.38\} \cup \{k > -0.62\}$. Fig. 1(a–f) illustrates the feasibility of this method. It is clear that the control parameter k can control the bifurcation of the CML Julia sets from the simulation figures. The bifurcation is changing from unconspicuously to obviously and the numbers of bifurcation becomes less with the increasing of k. Therefore, we can choose appropriate k to control the CML Julia sets, so as to satisfy the real requirements of the engineering technology and demands of fractal graphs for the industry production.

3.2. The optimal control

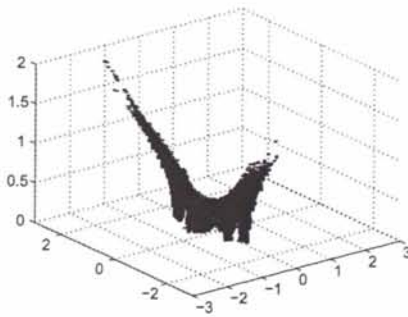
In above subsection, the control of the CML Julia sets has been studied by applying the gradient control. But the fixed point of the system needs to be known. In the following, the control of the CML Julia sets is accomplished by using the optimal control. For this control method, we do not need to know the fixed point of the controlled system (3). Hence, we take $u_n = -k[z_{n+1}(i) - z_n(i)]$ [15], then the controlled system (4) reduces to

$$z_{n+1}(i) = (1-k)[(1-\varepsilon)z_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1) + z_n^2(i+1)) + c] + kz_n(i), \quad i = 1,2,\ldots,N. \tag{16}$$

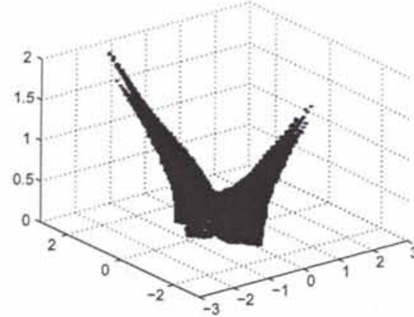
Denote

$$F(z(i)) = (1-k)[(1-\varepsilon)z^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}(z^2(i-1) + z^2(i+1)) + c] + kz(i), \quad i = 1,2,\ldots,N, \tag{17}$$

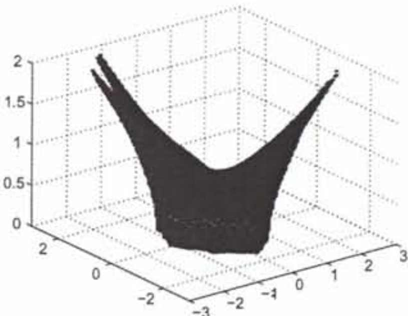
then the Jacobin matrix J_F of $F(z(i))$ is given by



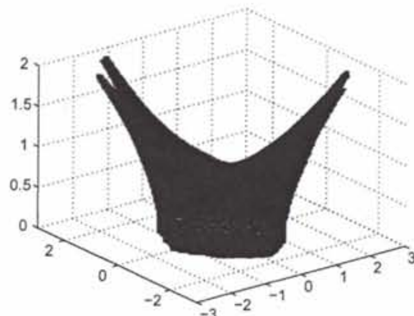
(a) $k = -0.5$



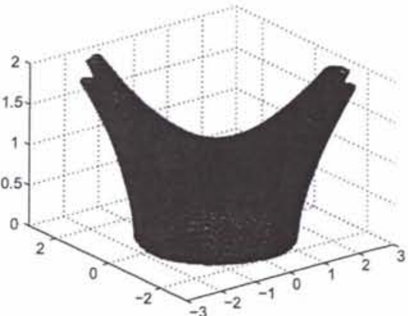
(b) $k = -0.3$



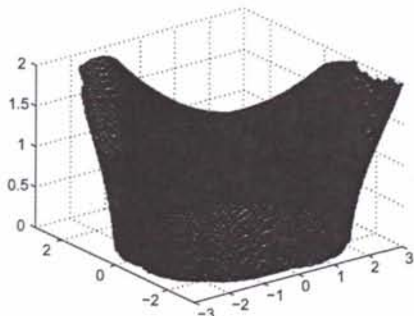
(c) $k = -0.1$



(d) $k = 0$



(e) $k = 0.3$



(f) $k = 0.8$

Fig. 1. when $\varepsilon = 0.4$ and $c = -0.2 + 0.1i$, the figures of the controlled system (12) with the changes of k.

$$J_F = \begin{pmatrix} 2(1-k)(1-\varepsilon)z(1)+k & (1-k)\varepsilon z(2) & \cdots & (1-k)\varepsilon z(N) \\ (1-k)\varepsilon z(1) & 2(1-k)(1-\varepsilon)z(2)+k & \cdots & 0 \\ 0 & (1-k)\varepsilon z(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & (1-k)\varepsilon z(N) \\ (1-k)\varepsilon z(1) & 0 & \cdots & 2(1-k)(1-\varepsilon)z(N)+k \end{pmatrix},$$

where J_F is an $N \times N$ matrix. Similarly, the diagonal matrix $\widehat{J}_F$ of J_F is obtained by

$$\widehat{J}_F = G^{-1} J_F G$$

and the elements of $\widehat{J}_F$ is

$$\widehat{J}_F(l,l) = 2(1-k)(1-\varepsilon)z(l) + k + 2(1-k)\varepsilon z(l)\cos(\theta_l), \tag{18}$$

where $\theta_l = \frac{2\pi l}{N}$, $l = 1,2,\ldots,N$. Hence, the stable condition of the fixed plane for the controlled system (16) is the eigenvalues of J_F at the fixed plane in the unit circle of the complex plane. According to (18), the module of eigenvalues of J_F at the fixed plane is bounded between $|2(1-k)(1-2\varepsilon)z^* + k|$ and $|2(1-k)z^* + k|$. Hence, we get $|2(1-k)(1-2\varepsilon)z^* + k| < 1$ and $|2(1-k)z^* + k| < 1$.

In the same way, we take $z^* = z^*(i) = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$ for simplicity, then the range of the control parameter k is

$$|k| < \min\left\{\frac{1-|(1-2\varepsilon)(1-\sqrt{1-4c})|}{|1-(1-2\varepsilon)(1-\sqrt{1-4c})|}, \frac{1-|1-\sqrt{1-4c}|}{|\sqrt{1-4c}|}\right\}.$$

Therefore, we can choose appropriate k to control the trajectory of CML Julia sets, so as to achieve the control of the CML Julia sets.

Similarly, we take the lattice length of the system (3) as two, as an example, to illustrate the control of the CML Julia sets using the optimal control method. Hence, the controlled system (16) reduces to

$$\begin{cases} z_{n+1}(1) = (1-k)\left[(1-\varepsilon)z_n^2(1) + \varepsilon z_n^2(2) + c\right] + kz_n(1), \\ z_{n+1}(2) = (1-k)\left[(1-\varepsilon)z_n^2(2) + \varepsilon z_n^2(1) + c\right] + kz_n(2). \end{cases} \tag{19}$$

At the same time, the formula (17) becomes

$$F(z(i)) = (1-k)[(1-\varepsilon)z^2(i) + \varepsilon(z^2(i+1) + c] + kz(i), \quad i = 1,2. \tag{20}$$

According to the periodic boundary condition $z(1) = z(3)$, we have

$$J_F = \begin{pmatrix} 2(1-k)(1-\varepsilon)z(1) + k & 2(1-k)\varepsilon z(2) \\ 2(1-k)\varepsilon z(1) & 2(1-k)(1-\varepsilon)z(2) + k \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Hence, the diagonal matrix $\widehat{J}_F$ of J_F is

$$\widehat{J}_F = \begin{pmatrix} 2(1-k)(1-2\varepsilon)z(1) + k & 0 \\ 0 & 2(1-k)z(2) + k \end{pmatrix}. \tag{22}$$

The eigenvalues of $\lambda_1 = 2(1-k)(1-2\varepsilon)z(1) + k$ and $\lambda_2 = 2(1-k)z(2) + k$ are obtained from (22). Hence, we get $|\lambda_1| = |2(1-k)(1-2\varepsilon)z^*(1) + k| < 1$ and $|\lambda_2| = |2(1-k)z^*(2) + k| < 1$ according to the stability condition of the fixed plane. Similarly, we obtain the range of the control parameter k. For example, we take $\varepsilon = 0.4$ and $c = -0.2 + 0.1i$, then the k satisfies $k \in \{-0.4567 < k < 0.4567\}$. The control of the system (19) is shown by Fig. 2. Fig. 2(a–f) illustrate the effectiveness of the optimal control. It is clearly that the parameter k can control the bifurcation of the CML Julia sets. The number of bifurcation becomes less with the increasing of k. Therefore, the control of the CML Julia sets is achieved by choosing the appropriate k.

4. Synchronization of the Julia sets in coupled map lattice

Firstly, the definition of the synchronization of CML Julia sets is given as follows.

Definition 4. Consider two CML Julia sets

$$z_{n+1}(i) = (1-\varepsilon)z_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}\left(z_n^2(i-1) + z_n^2(i+1)\right) + c_1, \tag{23}$$

$$w_{n+1}(i) = (1-\varepsilon)w_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}\left(w_n^2(i-1) + w_n^2(i+1)\right) + c_2, \tag{24}$$

where c_1 and c_2 are complex parameters, and $c_1 \neq c_2$; ε is the coupling strength and $\varepsilon \in [0,1]$.

A coupling term $p[z_n(i), w_n(i), c_2, \varepsilon; k]$ is added to the system (23), then

$$z_{n+1}(i) = (1-\varepsilon)z_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}\left(z_n^2(i-1) + z_n^2(i+1)\right) + c_1 + p(z_n(i), w_n(i), c_2, \varepsilon; k), \tag{25}$$

where $p(\cdot)$ is a coupling item about $z_n(i)$, $w_n(i)$, c_2 and ε. It is clear that there exists a Julia set corresponding to every k. The Julia sets of (24) and (25) are denoted by J_s^1 and J_s^2 respectively.

If the CML Julia sets J_s^2 becomes the same with J_s^1 when k tends to k_0, namely,

$$\lim_{k \to k_0}\left(J_s^2 \cup J_s^1 - J_s^2 \cap J_s^1\right) = \emptyset \tag{26}$$

for some k_0, the CML Julia sets of the systems (24) and (25) achieve synchronization.

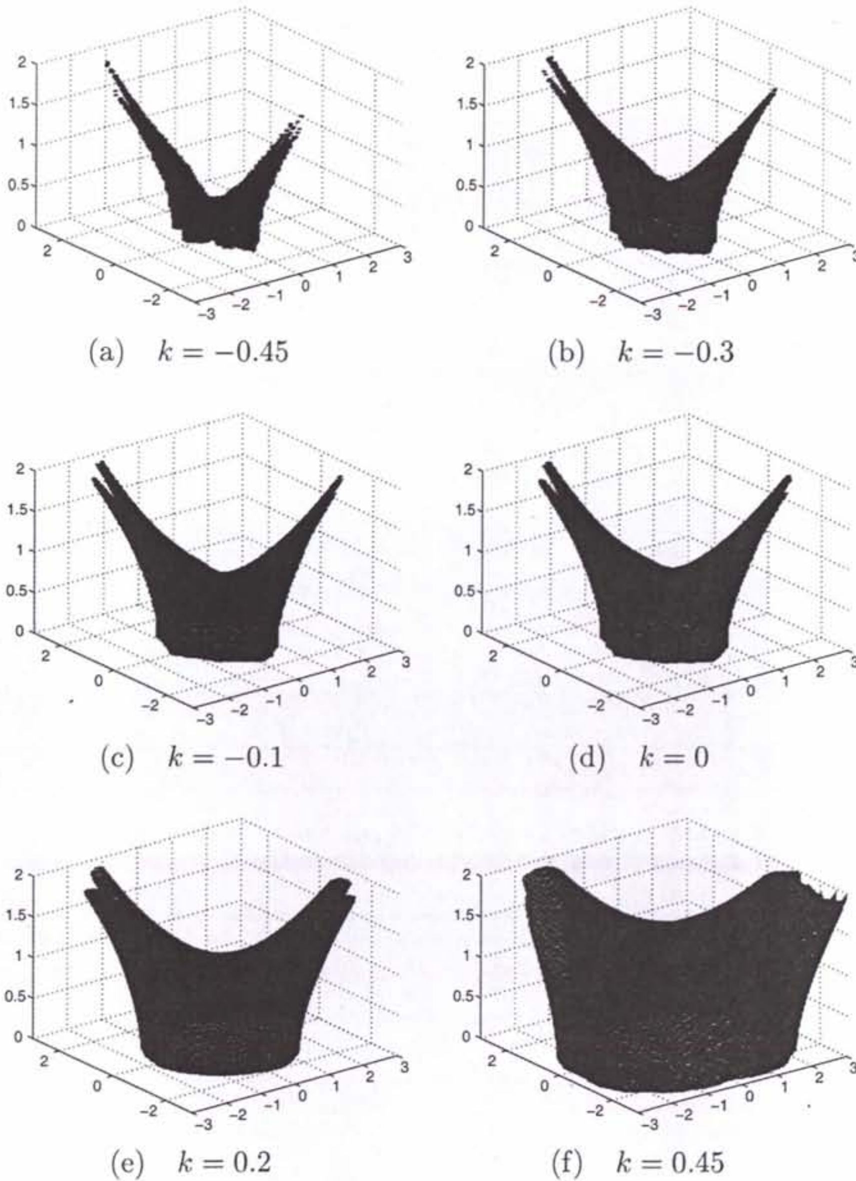


Fig. 2. when $\varepsilon = 0.4$ and $c = -0.2 + 0.1i$, the figures of the controlled system (19).

The synchronization of the CML Julia sets is achieved by taking the limitation of k in (26) based on Definition 4. Therefore, we can accomplish the synchronization of CML Julia sets by its trajectory synchronization. The change of $k \to k_0$ illustrates the case of the synchronization of CML Julia sets. In other words, the synchronization of CML Julia sets is also the synchronization case of the CML Julia sets J_s^2. Moreover, we take the same iterative initialization vector values of the systems (23) and (24).

4.1. Synchronization of the Julia sets in coupled map lattice using gradient control

In the following, we discuss the synchronization between CML Julia sets of the systems (23) and (24) by applying the gradient control. For simplicity, we denote

$$F(z_n(i), z_n(i-1), z_n(i+1)) = (1-\varepsilon)z_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}\left(z_n^2(i-1) + z_n^2(i+1)\right) + c_1, \tag{27}$$

$$G(w_n(i), w_n(i-1), w_n(i+1)) = (1-\varepsilon)w_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}\left(w_n^2(i-1)z + w_n^2(i+1)\right) + c_2, \tag{28}$$

where c_1 and c_2 are complex parameters and $c_1 \neq c_2$.

We take the coupling term $p(\cdot) = -\frac{k}{1+k}[F(z_n(i), z_n(i-1), z_n(i+1)) - G(w_n(i), w_n(i-1), w_n(i+1))]$. Then the coupled system (25) reduces to

$$z_{n+1}(i) = F(z_n(i), z_n(i-1), z_n(i+1)) - \frac{k}{1+k}[F(z_n(i), z_n(i-1), z_n(i+1)) - G(w_n(i), w_n(i-1), w_n(i+1))]. \tag{29}$$

From (24), (25) and (29), we have

$$\begin{aligned} z_{n+1}(i) - w_{n+1}(i) &= \frac{1}{1+k}[F(z_n(i), z_n(i-1), z_n(i+1)) - G(w_n(i), w_n(i-1), w_n(i+1))] \\ &= \frac{1}{1+k}[(1-\varepsilon)(z_n^2(i) - w_n^2(i)) + \frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i-1) - w_n^2(i-1)) + \frac{\varepsilon}{2}(z_n^2(i+1) - w_n^2(i+1)) + c_1 - c_2] \\ &= \frac{1}{1+k}\bigg\{(1-\varepsilon)(z_n(i) - w_n(i))(z_n(i) + w_n(i)) + \frac{\varepsilon}{2}[(z_n(i-1) - w_n(i-1))(z_n(i-1) + w_n(i-1)) \\ &\quad + (z_n(i+1) - w_n(i+1))(z_n(i+1) - w_n(i+1))] + c_1 - c_2\bigg\}. \end{aligned} \tag{30}$$

It is noted that CML Julia sets is closure, which can be obtained by calculating the iteration of the vector points in a bounded space S. We only consider the vector points whose trajectories are in S since $z(i) \notin J_s(F)$ if there exists an n_0 such that $F_{n_0}(z(i)) \notin S$. Since S is a bounded space, there exists $M > 0$ such that $|z(i)| < M$ for all $z(i) \in S$.

Hence, we obtain

$$\begin{aligned} |z_{n+1}(i) - w_{n+1}(i)| &\leqslant \frac{1}{|1+k|}[2M(1-\varepsilon)|z_n(i) - w_n(i)| + M\varepsilon(|z_n(i-1) - w_n(i-1)| + |z_n(i+1) - w_n(i+1)|) + |c_1 - c_2|] \\ &< \frac{1}{|1+k|}(2M(1-\varepsilon)|z_n(i) - w_n(i)| + 4M^2\varepsilon + |c_1 - c_2|) = \frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)|z_n(i) - w_n(i)| \\ &\quad + \frac{1}{|1+k|}(4M^2\varepsilon + |c_1 - c_2|) < \frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)\left[\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)|z_{n-1}(i) - w_{n-1}(i)|\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{|1+k|}(4M^2\varepsilon + |c_1 - c_2|)\right] + \frac{1}{|1+k|}(4M^2\varepsilon + |c_1 - c_2|) = \left(\left|\frac{1}{1+k}\right|2M(1-\varepsilon)\right)^2|z_{n-1}(i) - w_{n-1}(i)| \\ &\quad + \left|\frac{1}{1+k}\right|(4M^2\varepsilon + |c_1 - c_2|)\left(\left|\frac{1}{1+k}\right|2M(1-\varepsilon) + 1\right) < \cdots < \left(\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)\right)^n|z_1(i) - w_1(i)| \\ &\quad + \frac{1}{|1+k|}(4M^2\varepsilon + |c_1 - c_2|)\left[\left(\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)\right)^{n-1} + \cdots + \frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon) + 1\right] = \frac{1}{|1+k|}|c_1 \\ &\quad - c_2|\left[\left(\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)\right)^n + \left(\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)\right)^{n-1} + \cdots + \frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon) + 1\right] \\ &\quad + \frac{1}{|1+k|}4M^2\varepsilon\left[\left(\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)\right)^{n-1} + \cdots + \frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon) + 1\right] \\ &= \frac{1 - \left[\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)\right]^{n+1}}{1 - \frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)}\frac{1}{|1+k|}|c_1 - c_2| + \frac{1 - \left[\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)\right]^n}{1 - \frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)}\frac{1}{|1+k|}4M^2\varepsilon. \end{aligned} \tag{31}$$

when $\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon) < 1$, then the limit in the right formula of (31) is

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1 - \left(\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)}\frac{1}{|1+k|}|c_1 - c_2| + \frac{1 - \left(\frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)\right)^n}{1 - \frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)}\frac{1}{|1+k|}4M^2\varepsilon\right\} = \frac{\frac{1}{|1+k|}(|c_1 - c_2| + 4M^2\varepsilon)}{1 - \frac{1}{|1+k|}2M(1-\varepsilon)}. \tag{32}$$

It is noted that if

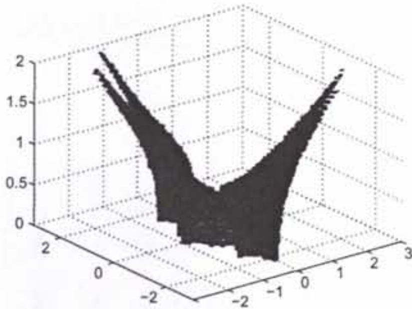
$$\frac{1}{|1+k|}(|c_1 - c_2| + 4M^2\varepsilon) \to 0,$$

namely, $|1 + k| \to \infty$, that is, $k \to \infty$, we obtain $|z_{n+1}(i) - w_{n+1}(i)| \to 0$ from (31) and (32). Therefore, the trajectories of the CML Julia sets of the systems (23) and (24) achieve synchronization. Similarly, we take the lattice length of the system (3) as two, as an example, to illustrate the case of synchronization by using the gradient control. Hence, the systems (23) and (24) reduce to

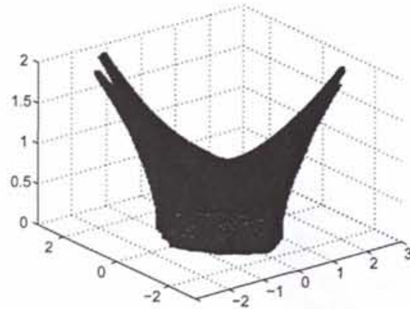
$$\begin{cases} z_{n+1}(1) = (1-\varepsilon)z_n^2(1) + \varepsilon z_n^2(2) + c_1, \\ z_{n+1}(2) = (1-\varepsilon)z_n^2(2) + \varepsilon z_n^2(1) + c_1. \end{cases} \tag{33}$$

$$\begin{cases} w_{n+1}(1) = (1-\varepsilon)w_n^2(1) + \varepsilon w_n^2(2) + c_2, \\ w_{n+1}(2) = (1-\varepsilon)w_n^2(2) + \varepsilon w_n^2(1) + c_2. \end{cases} \tag{34}$$

We add the coupling term $p_1(\cdot) = -\frac{k}{1+k}[(1-\varepsilon)z_n^2(1) + \varepsilon z_n^2(2) + c_1 - ((1-\varepsilon)w_n^2(1) + \varepsilon w_n^2(2) + c_2)]$ and $p_2(\cdot) = -\frac{k}{1+k}[z_{n+1}(2) = (1-\varepsilon)z_n^2(2) + \varepsilon z_n^2(1) + c_1 - ((1-\varepsilon)w_n^2(2) + \varepsilon w_n^2(1) + c_2)]$ to (33) respectively, then the system (33) becomes

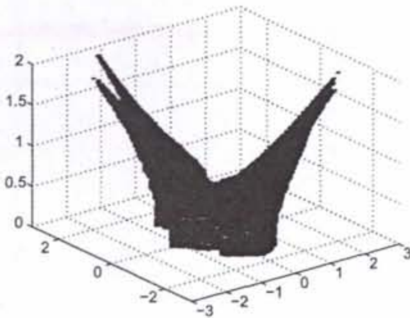


(a) The CML Julia set of the system (33) with $c_1 = -1$.

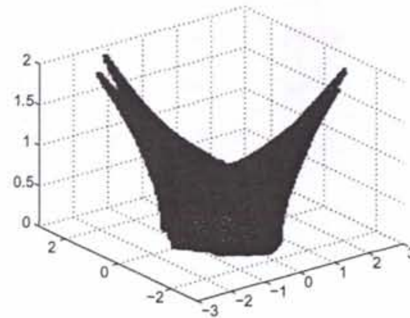


(b) The CML Julia set of the system (34) with $c_2 = -0.2 + 0.1i$.

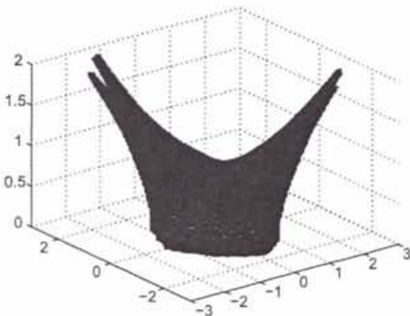
Fig. 3. The CML Julia sets of the systems (33) and (34).



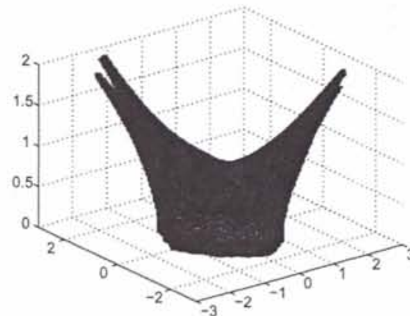
(a) $k = 0.2$.



(b) $k = 0.5$.



(c) $k = 3$.



(d) $k = 6$.

Fig. 4. The synchronization of the CML Julia set with changes of k by using the gradient control.

$$\begin{cases} z_{n+1}(1) = \frac{1}{1+k}[(1-\varepsilon)z_n^2(1) + \varepsilon z_n^2(2) + c_1] + \frac{k}{1+k}[(1-\varepsilon)w_n^2(1) + \varepsilon w_n^2(2) + c_2], \\ z_{n+1}(2) = \frac{1}{1+k}[(1-\varepsilon)z_n^2(2) + \varepsilon z_n^2(1) + c_1] + \frac{k}{1+k}[(1-\varepsilon)w_n^2(2) + \varepsilon w_n^2(1) + c_2]. \end{cases} \tag{35}$$

Hence, $\frac{1}{|1+k|}|2M(1-\varepsilon)| < 1$ and $k \to \infty$, the CML Julia sets of the systems (33) and (34) achieve synchronization. The case of synchronization can be seen from the simulations. Fig. 3(a) and Fig. 3(b) are the original CML Julia sets of the systems (33) and (34), respectively. From the simulations of Fig. 4, it is clear that the CML Julia set of the system (35) changes gradually toward to the Julia set of (34) with the increasing of k and become the Julia set of (34) as $k \to \infty$. Therefore, the CML Julia set of the synchronization is obtained.

We take the limitation of (26), the synchronization of the CML Julia sets is achieved. Therefore, we can accomplish the synchronization of CML Julia sets by its trajectory synchronization, and the change of $k \to k_0$ illustrates the case of the synchronization of CML Julia sets. It is also the synchronization case of the CML Julia sets J_s^2. Here we take the same iterative original vector values of the systems (33) and (34).

4.2. Synchronization of the Julia sets in coupled map lattice using optimal control

In this subsection, we discuss the synchronization between the system (23) and the system (24) via the optimal control method.

We take the coupling term $p(\cdot) = -k[F(z_n(i), z_n(i-1), z_n(i+1)) - G(w_n(i), w_n(i-1), w_n(i+1))]$ [15]. Then the coupled system (25) reduces to

$$z_{n+1}(i) = (1-\varepsilon)z_n^2(i) + \frac{\varepsilon}{2}\left(z_n^2(i-1) + z_n^2(i+1)\right) + c_1 - k[F(z_n(i), z_n(i-1), z_n(i+1)) - G(w_n(i), w_n(i-1), w_n(i+1))]. \tag{36}$$

In the same way, we obtain

$$\begin{aligned} |z_{n+1}(i) - w_{n+1}(i)| &\leqslant |1-k|[2M(1-\varepsilon)|z_n(i) - w_n(i)| + M\varepsilon(|z_n(i-1) - w_n(i-1)| + |z_n(i+1) - w_n(i+1)|) + |c_1 - c_2|] \\ &< |1-k|(2M(1-\varepsilon)|z_n(i) - w_n(i)| + 4M^2\varepsilon + |c_1 - c_2|) = |1-k|2M(1-\varepsilon)|z_n(i) - w_n(i)| \\ &\quad + |1-k|(4M^2\varepsilon + |c_1 - c_2|) < |1-k|2M(1-\varepsilon)[|1-k|2M(1-\varepsilon)|z_{n-1}(i) - w_{n-1}(i)| \\ &\quad + |1-k|(4M^2\varepsilon + |c_1 - c_2|)] + |1-k|(4M^2\varepsilon + |c_1 - c_2|) = (|1-k|2M(1-\varepsilon))^2|z_{n-1}(i) - w_{n-1}(i)| \\ &\quad + |1-k|(4M^2\varepsilon + |c_1 - c_2|)(|1-k|2M(1-\varepsilon) + 1) < \cdots < (|1-k|2M(1-\varepsilon))^n|z_1(i) - w_1(i)| \\ &\quad + |1-k|(4M^2\varepsilon + |c_1 - c_2|)(|1-k|2M(1-\varepsilon)^{n-1} + \cdots + |1-k|2M(1-\varepsilon) + 1) \\ &= |1-k||c_1 - c_2|[(|1-k|2M(1-\varepsilon))^n + (|1-k|2M(1-\varepsilon))^{n-1} + \cdots + |1-k|2M(1-\varepsilon) + 1] \\ &\quad + |1-k|4M^2\varepsilon[(|1-k|2M(1-\varepsilon))^{n-1} + \cdots + |1-k|2M(1-\varepsilon) + 1] \\ &= \frac{1 - (|1-k|2M(1-\varepsilon))^{n+1}}{1 - |1-k|2M(1-\varepsilon)}|1-k||c_1 - c_2| + \frac{1 - (|1-k|2M(1-\varepsilon))^n}{1 - |1-k|2M(1-\varepsilon)}|1-k|4M^2\varepsilon. \end{aligned} \tag{37}$$

when $|1-k|2M(1-\varepsilon) < 1$, then the limit in the right of (37) is

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1 - (|1-k|2M(1-\varepsilon))^{n+1}}{1 - |1-k|2M(1-\varepsilon)}|1-k||c_1 - c_2| + \frac{1 - (|1-k|2M(1-\varepsilon))^n}{1 - |1-k|2M(1-\varepsilon)}|1-k|4M^2\varepsilon\right\} = \frac{|1-k|(|c_1 - c_2| + 4M^2\varepsilon)}{1 - |1-k|2M(1-\varepsilon)}. \tag{38}$$

It is noted that if

$$|1-k|(|c_1 - c_2| + 4M^2\varepsilon) \to 0,$$

namely, $k \to 1$, we obtain $|z_{n+1}(i) - w_{n+1}(i)| \to 0$ from (37) and (38). Therefore, the trajectories of the CML Julia sets of the systems (23) and (24) achieve synchronization.

Similarly, we take the lattice length of the system (3) as two, as an example, to illustrate the case of synchronization using the optimal control method. The coupling term $p_1(\cdot) = -k[(1-\varepsilon)z_n^2(1) + \varepsilon z_n^2(2) + c_1 - ((1-\varepsilon)w_n^2(1) + \varepsilon w_n^2(2) + c_2)]$ and $p_2(\cdot) = -k[z_{n+1}(2) = (1-\varepsilon)z_n^2(2) + \varepsilon z_n^2(1) + c_1 - ((1-\varepsilon)w_n^2(2) + \varepsilon w_n^2(1) + c_2)]$ are added to the system (33), then the system (33) becomes

$$\begin{cases} z_{n+1}(1) = (1-k)\left[(1-\varepsilon)z_n^2(1) + \varepsilon z_n^2(2) + c_1\right] + k\left[(1-\varepsilon)w_n^2(1) + \varepsilon w_n^2(2) + c_2\right], \\ z_{n+1}(2) = (1-k)\left[(1-\varepsilon)z_n^2(2) + \varepsilon z_n^2(1) + c_1\right] + k\left[(1-\varepsilon)w_n^2(2) + \varepsilon w_n^2(1) + c_2\right]. \end{cases} \tag{39}$$

From the previous discussion, when $|1-k|2M(1-\varepsilon) < 1$ and $k \to 1$, the CML Julia sets of the systems (33) and (34) achieve synchronization. We take $c_1 = -1$ and $c_2 = -0.2 + 0.1i$, then the case of synchronization is demonstrated as Fig. 5. From the

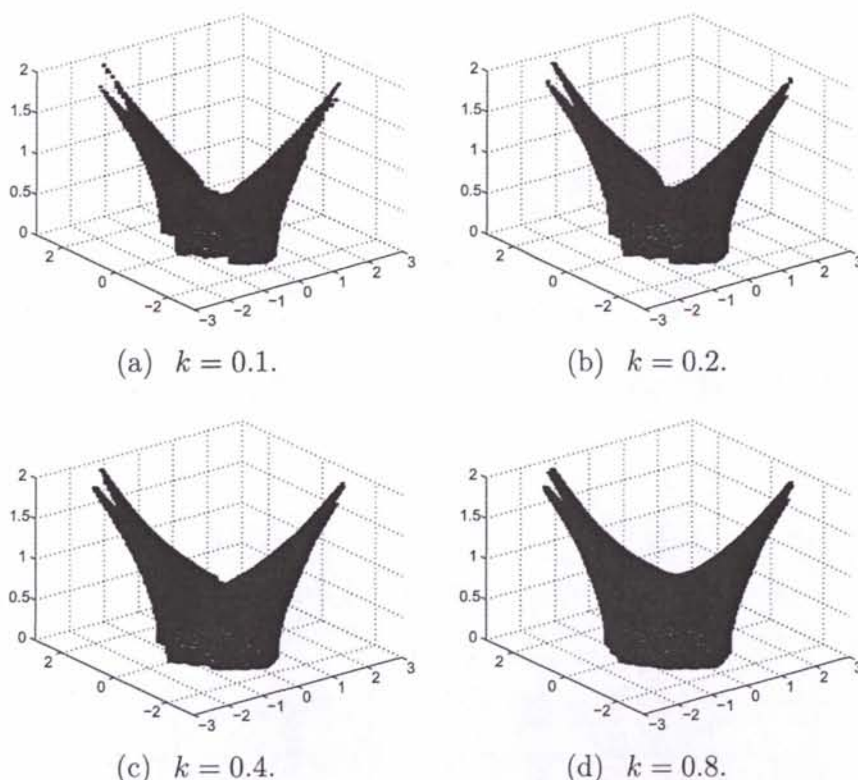


Fig. 5. The synchronization of the CML Julia sets with changes of parameters k by using the optimal control.

Fig. 5, it is clear that the CML Julia set of the system (35) changes toward to the Julia set of the system (34) with the increasing of k, namely, $k \to 1$. That is to say, the CML Julia set of the synchronization is obtained.

A plane $z(2)$ and the tangent plane of $x(2) = y(2)$ are taken for above all simulations. Since the direction of main bifurcation is related with the tangent plane chosen, then the direction of bifurcation in Figs. 1–5 is the same. The discussion of other cases are similar and will be omitted.

5. Conclusions

In this paper, we achieve the control and synchronization of CML Julia sets by applying the gradient control and optimal control. The definition of synchronization of two different Julia sets in coupled map lattice is given. Specially, we take the lattice length of the system (3) as two, as examples, to illustrate the effectiveness and feasibility to achieve control and synchronization.

These control methods and their theories are successfully applied to the spatial fractal, which have important practical significance for further study of the spatial fractal and explain the corresponding complicated phenomena.

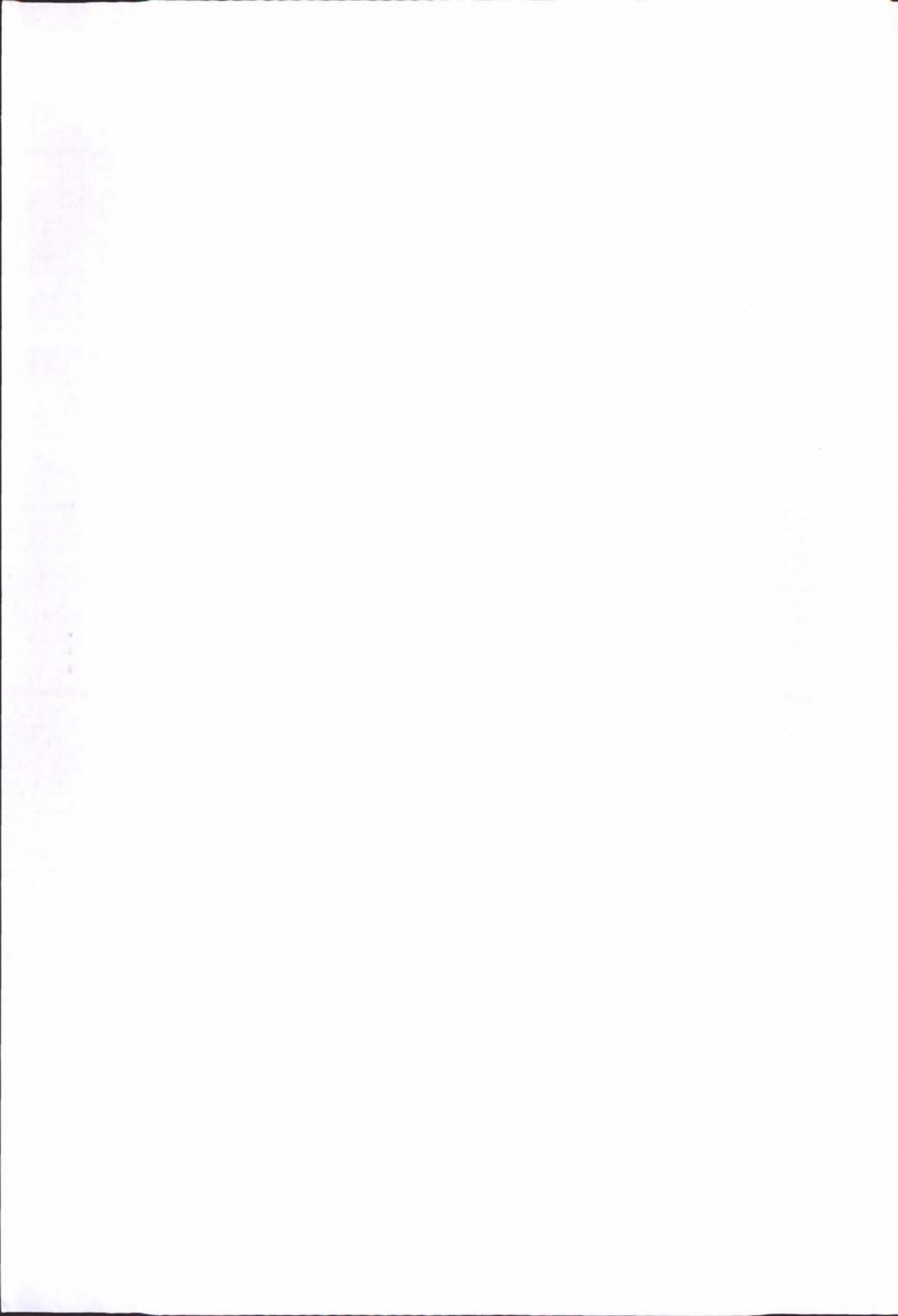
Acknowledgements

The work was partially supported by the NNSF of China (Nos. 60874009 and 10971120) and a foundation for author of National Excellent Doctoral Dissertation of PR China (FANEDD) (No. 200444).

References

[1] Mandelbrot BB. The fractal geometry of nature. San Francisco: Freeman; 1982.
[2] Lakhtakia A, Varadan VV, Messier R, Varadan VK. On the symmetries of the Julia sets for the process $z \leftarrow z^p + c$. J Phys A: Math Gen 1987;20:3533–5.
[3] Beck C. Physical meaning for Mandelbrot and Julia sets. Physica D 1999;125:171–82.
[4] Wang XY, Meng QY. Research on physical meaning for the generalized Mandelbrot-Julia sets based on Langevin problem. Acta Physica Sinica 2004;53:388–95.
[5] Zhang YP, Liu ST, Sun WH. Feedback control in fractal mechanics. Chaos Soliton Fract 2009;40:337–43.
[6] Zhang YP, Liu ST. Gradient control and synchronization of Julia sets. Chin Phys B 2008;17:543–9.
[7] Norton A. Generation and display of geometric fractals in 3-D. Comput Graph 1982;16:61–7.

[8] Hart JC, Sandin DJ, Kauffman LH. Ray tracing deterministic 3-D fractals. Comput Graph 1989;23:289–96.
[9] Gintz TW. Artists statement CQUATSA non-distributive quad algebra for 3-D rendering of Mandelbrot and Julia sets. Comput Graph 2002;26:367–70.
[10] Sui SG. Spatial Fractal of complex dynamic system. Master's thesis of shandong universty, 2005 (In Chinese).
[11] Bogush A, Gazizov AZ, Kurochkin YA, Stosui VT. On symmetry properties of quaternionic analogs of Julia sets, Proceedings of the 9th Annual Seminar NPCS-2000. Belarus, Minsk, 2000, p. 304–309.
[12] Wang XY, Sun YY. The general quaternionic M–J sets on the mapping $z \leftarrow z^{\alpha} + c(\alpha \in N)$. Comput Math Appl 2007;54:1718–32.
[13] Falconer K. Fractals geometry-mathematical foundations and applications. New York: Wiley; 1990.
[14] Amritkar RE, Gade PM, Gangal AD, Nandkumaran VM. Stability of periodic orbits of coupled-map lattices. Phys Rev A 1991;44(6):3407–10.
[15] de Sousa VM, Lichtenberg AJ. Controlling chaos using nonlinear feedback with delay. Phys Rev E 1996;54(2):1200–8.



Anti-synchronization between different chaotic complex systems

Phys. Scr. 83 (2011) 065006 (9pp) doi:10.1088/0031-8949/83/06/065006

Anti-synchronization between different chaotic complex systems

Ping Liu and Shutang Liu

College of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, People's Republic of China

E-mail: liupingshd@126.com

Received 2 November 2010
Accepted for publication 19 April 2011
Published 18 May 2011
Online at stacks.iop.org/PhysScr/83/065006

Abstract
Many studies on the anti-synchronization of nonlinear real dynamic systems have been carried out, whereas the anti-synchronization of chaotic complex systems has not been studied extensively. In this work, the anti-synchronization between a new chaotic complex system and a complex Lorenz system and that between a new chaotic complex system and a complex Lü system were separately investigated by active control and nonlinear control methods, and explicit expressions were derived for the controllers that are used to achieve the anti-synchronization of chaotic complex systems. These expressions were tested numerically and excellent agreement was found. Concerning the new chaotic complex system, we discuss its dynamical properties including dissipation, chaotic behavior, fixed points, and their stability and invariance.

PACS numbers: 05.45.Gg, 05.45.Xt, 05.45.Pq

(Some figures in this article are in colour only in the electronic version.)

1. Introduction

Since Pecora and Carroll [1] first studied the synchronization of chaotic dynamical systems in 1990, chaos synchronization has received increasing attention owing to its many potential applications, for example, secure communication, chemical reactions, biological systems and so on. Until now, several types of synchronization phenomena have been proposed in the literature, such as complete synchronization [1], phase synchronization [2], lag synchronization [3, 4], etc. Complete synchronization implies that the differences of state variables of synchronized systems with different initial values converge to zero, which is observed in coupled chaotic systems and chaotic systems with noise perturbation. Phase synchronization implies that the phase differences between two chaotic systems are locked within 2π, while their amplitudes remain chaotic and unrelated. Lag synchronization is described as the coincidence of two chaotic trajectories from drive and response systems with a constant time lag. Meanwhile, the phenomenon of anti-synchronization is also observed in periodic chaotic systems [5, 6], which is a phenomenon in which the state variables of synchronized systems with different initial values have the same absolute values but opposite signs. The sums of two signals are expected to converge to zero when anti-synchronization occurs. The phenomenon of anti-synchronization has been extensively investigated by many authors; for example, Kim *et al* [7] studied the anti-synchronization in coupled identical chaotic oscillators and analyzed its base mechanism via the dynamics of the difference and the sum of the relevant variables in coupled chaotic oscillators. Li and Zhou [8] generalized active control to the anti-synchronization of two identical chaotic real systems. Genesio and Tesi [9] and Li *et al* [6] considered anti-synchronization in two different chaotic real systems using active control and nonlinear control methods, respectively.

On the other hand, several scholars have introduced random force and periodic excitation into complex systems and studied the dynamic responses of complex systems and their control and synchronization. For example, Mahmoud *et al* [10] studied strange attractors and chaos control in periodically forced complex Duffing's oscillators. In [11, 12],

the authors discussed the chaotic behavior and the control of a complex Duffing system with a stochastic excitation. Global stability properties of the complex Lorenz model and its relevance to physical systems have been investigated [13, 14]. Mahmoud *et al* [15, 16] studied the synchronization of pairs of identical complex Chen and Lü systems and also showed their chaotic attractors and the stability of fixed points. In particular, a scheme was designed for anti-synchronization of an n-dimensional hyperchaotic complex nonlinear system via an active control technique [17]. However, anti-synchronization of different chaotic complex systems is very important, since it is rarely the case that all the components and parameters of the drive and response systems are exactly identical. Therefore, the problem of anti-synchronization between two different chaotic complex systems is worth studying.

Based on the above discussion, the basic characteristics of a new complex chaotic system are presented first. The anti-synchronization between a new complex chaotic system and a complex Lorenz system and that between a new complex chaotic system and a complex Lü system are separately achieved via active control and nonlinear control methods. Finally, a number of simulations show that both methods are effective in achieving anti-synchronization of the new complex system.

2. Dynamical properties of a new chaotic complex system

In 2006, based on the Lorenz system, Wang *et al* constructed a new real chaotic nonlinear system [18], which is briefly referred to as the Wang system and is described by the following system:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1 - x_2), \\ \dot{x}_2 = -c_1 x_2 + x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 = -b_1 x_3 + d_1 x_1 x_2, \end{cases} \tag{1}$$

where x_1, x_2 and x_3 are real state variables, and $a_1 > 0, b_1 > 0$, $c_1 > 0$ and $d_1 > 0$ are real parameters. System (1) exhibits chaotic attractors when $a_1 = 20$, $b_1 = 2$, $c_1 = 28$ and $d_1 = 1$ and displays periodicity when $a_1 = 20$, $b_1 = 8$, $c_1 = 28$, $d_1 = 1$ or $a_1 = 7$, $b_1 = 2$, $c_1 = 28$, $d_1 = 1$; for more details, see [18]. Its control and synchronization have also been discussed in the literature (see [19, 20]).

The complex extension of the Wang system (1) is expressed by

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a_1(z_1 - z_2), \\ \dot{z}_2 = -c_1 z_2 + z_1 z_3, \\ \dot{z}_3 = -b_1 z_3 + \frac{1}{2} d_1(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2), \end{cases} \tag{2}$$

where $z_1 = z_1^r + j z_1^i = u_{11} + j u_{21}$ and $z_2 = z_2^r + j z_2^i = u_{31} + j u_{41}$ are complex state variables, $z_3 = u_{51}$ is a real state variable, and $j = \sqrt{-1}$. Here $\dot{z}$ denotes variable z derivatives with respect to time and the overbar $\bar{z}$ represents the complex conjugate of z.

In the following section, we present the complex behaviors of the new complex chaotic system, which is called the complex Wang system for simplicity. Separating the real and imaginary parts of the complex Wang system (2), we obtain the real version as

$$\begin{cases} \dot{u}_{11} = a_1(u_{11} - u_{31}), \\ \dot{u}_{21} = a_1(u_{21} - u_{41}), \\ \dot{u}_{31} = -c_1 u_{31} + u_{11} u_{51}, \\ \dot{u}_{41} = -c_1 u_{41} + u_{21} u_{51}, \\ \dot{u}_{51} = -b_1 u_{51} + d_1(u_{11} u_{31} + u_{21} u_{41}). \end{cases} \tag{3}$$

System (3) has the following basic dynamic properties.

(i) *Dissipation.* In this regard, the formula

$$\nabla \cdot F = \sum_{p=1}^{5} \frac{\partial \dot{u}_{p1}}{\partial u_{p1}} = 2a_1 - b_1 - 2c_1$$

denotes the rate of change of phase space volume of system (3). When

$$2a_1 - b_1 - 2c_1 < 0, \tag{4}$$

the initial volume element is $V(0)$ and becomes in time $V(t) = V(0)e^{-(2c_1+b_1-2a_1)t}$. That is, when $t \to \infty$, every volume element containing trajectories of system (3) shrinks to zero at exponential convergent rate.

(ii) *Chaotic behavior and attractors.* System (3) in vector notation can be written as

$$\dot{U}(t) = H(U(t); \eta), \tag{5}$$

where $U(t) = [u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{41}, u_{51}]^{\mathrm{T}}$ is the state space vector, $H = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5]^{\mathrm{T}}$, η is a set of real parameters, and T denotes the transpose. The linearized (variational) equations describing small deviations δU from the trajectory $U(t)$ are

$$\delta \dot{U}(t) = J_{pq}(U(t); \eta)\delta U, \text{ where } p, q = 1, 2, 3, 4, 5, \tag{6}$$

where $J_{pq} = \frac{\partial h_p}{\partial u_q}$ is the Jacobian matrix of system (3) and is denoted as

$$J_{pq} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & -a_1 & 0 \\ u_{51} & 0 & -c_1 & 0 & u_{11} \\ 0 & u_{51} & 0 & -c_1 & u_{21} \\ d_1 u_{31} & d_1 u_{41} & d_1 u_{11} & d_1 u_{21} & -b_1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

According to the definition of the Lyapunov exponents [21], we obtain the Lyapunov exponents of system (3) as

$$\lambda_p = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|\delta u'_{p1}(t)\|}{\|\delta u'_{p1}(0)\|}, \quad p = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{8}$$

To find λ_i, equations (5) and (6) must be numerically solved simultaneously using a simple Runge–Kutta method of order four.

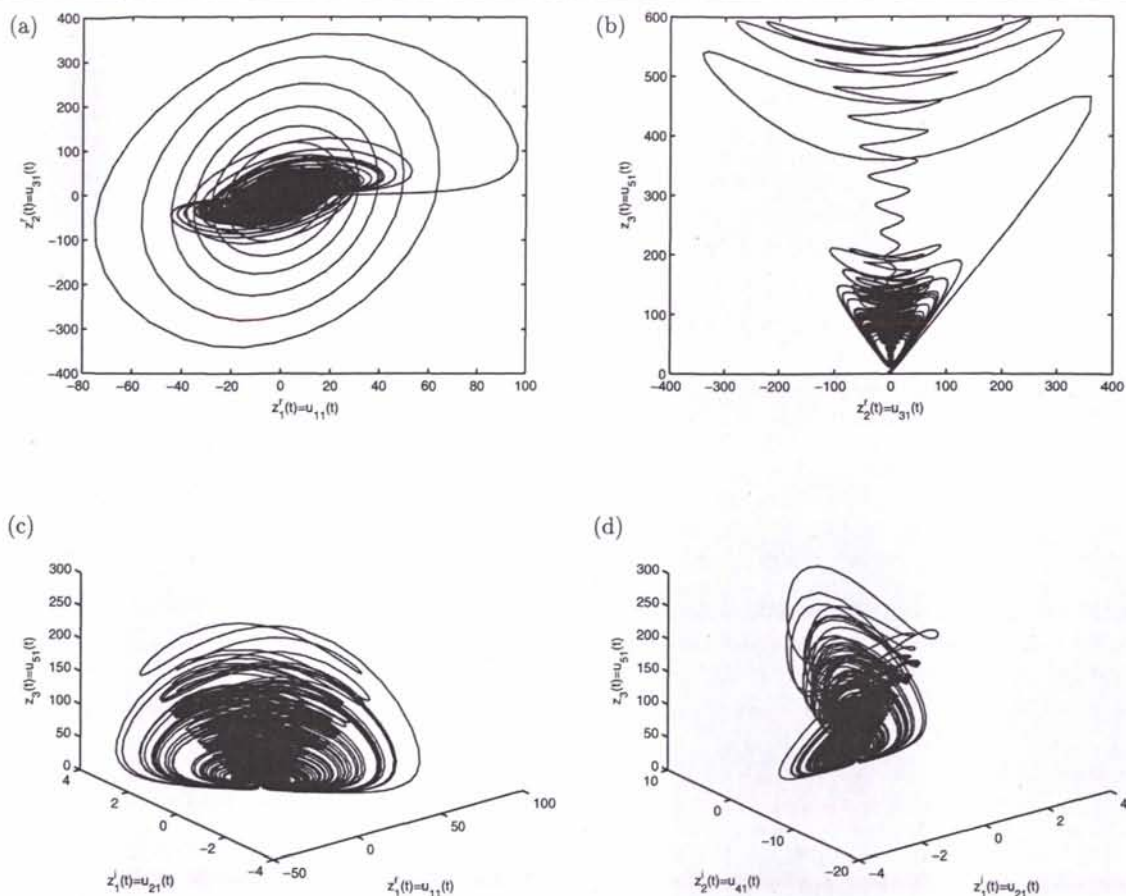


Figure 1. Chaotic behavior and attractors of system (3) in different phase planes and projections.

For the case of $a_1 = 20$, $b_1 = 2$, $c_1 = 28$, $d_1 = 1$ with initial values $(u_{11}(0), u_{21}(0), u_{31}(0), u_{41}(0), u_{51}(0)) = (2, 1, -5, 3, 4)$, we calculate the Lyapunov exponents, which are $\lambda_1 = 2.22$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -8.05$ and $\lambda_5 = -12.67$. This means that system (3) for such a choice of a_1, b_1, c_1, d_1 is chaotic since one of the Lyapunov exponents is positive. The chaotic attractor of system (3) using the same choice of parameters and initial conditions is plotted in figure 1 in different phase planes and projections.

The maximum Lyapunov exponent is defined as [21]

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|\delta U(t)\|}{\|\delta U(0)\|}. \tag{9}$$

For the same parameters and initial values as those in figure 1, the numerical calculation of the maximal Lyapunov exponent versus t of the attractor shown in figure 1 using formula (9) is plotted in figure 2. Obviously, the maximum Lyapunov exponent of this attractor is clearly positive, indicating that the motion of the attractor is chaotic.

(iii) *Fixed points and their stability.* The fixed points of system (3) can be calculated by solving equations $\dot{u}_{p1} = 0$, $p = 1, 2, \ldots, 5$. If $b_1c_1d_1 > 0$, we obtain the five fixed points of system (3) as

$$E_1 = (0, 0, 0, 0, 0),$$

$$E_{2,3} = \left(\pm\sqrt{\frac{b_1c_1}{2d_1}}, \pm\sqrt{\frac{b_1c_1}{2d_1}}, \pm\sqrt{\frac{b_1c_1}{2d_1}}, \pm\sqrt{\frac{b_1c_1}{2d_1}}, c_1\right),$$

$$E_{4,5} = \left(\pm\sqrt{\frac{b_1c_1}{2d_1}}, \mp\sqrt{\frac{b_1c_1}{2d_1}}, \pm\sqrt{\frac{b_1c_1}{2d_1}}, \mp\sqrt{\frac{b_1c_1}{2d_1}}, c_1\right).$$

To study the stability of E_1, the characteristic polynomial of the Jacobian matrix J_{pq} of system (3) at point E_1 is

$$(\delta - a_1)^2(\delta + c_1)^2(\delta + b_1) = 0.$$

Then the eigenvalues of the corresponding linearized system (6) at point E_1 are $\delta_1 = \delta_2 = a_1$, $\delta_3 = \delta_4 = -c_1$ and $\delta_5 = -b_1$. According to the linear system theory, if and only if the real parts of all eigenvalues of the linearized system (6) at the fixed points are negative, the fixed points are stable. Therefore, when $a_1 < 0$, $b_1 > 0$ and $c_1 > 0$, the fixed point E_1 of system (3) is stable; otherwise it is unstable.

The stability of fixed points $E_{2,3}$ and $E_{4,5}$ can also be discussed similarly and will be omitted. The necessary conditions of system (3) to generate chaos are that formula (4)

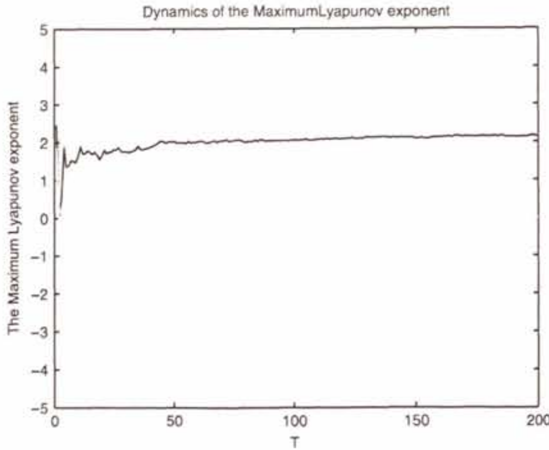


Figure 2. The maximum Lyapunov exponent of system (3) for the same parameters and initial conditions as in figure 1.

holds and E_m ($m = 1, 2, 3, 4, 5$) are unstable fixed points. To satisfy these conditions, there are many choices of parameters a_1, b_1 and c_1.

(iv) *Symmetry.* System (3) is symmetrical about the u_{51}-axis, due to its invariance under the transformation $(u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{41}, u_{51}) \to (-u_{11}, -u_{21}, -u_{31}, -u_{41}, u_{51})$. In particular, the symmetry about the u_{51}-axis for any choice of parameters a_1, b_1, c_1 and d_1 is accurate. Figure 1 also shows the symmetry of the motion trajectory of system (3) about the u_{51}-axis.

In the following sections, we discuss the anti-synchronization of the complex Wang system (2) with a complex Lorenz system and a complex Lü system.

3. The anti-synchronization between the complex Wang system and a complex Lorenz system

In this section, we will discuss the anti-synchronization using the complex Lorenz system [13] to drive the complex Wang system (2) by active control.

In 1983, the complex Lorenz system [13] was introduced as follows:

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = a_2(w_2 - w_1), \\ \dot{w}_2 = c_2 w_1 - w_1 w_3 - w_2, \\ \dot{w}_3 = -b_2 w_3 + \frac{1}{2}(\bar{w}_1 w_2 + w_1 \bar{w}_2), \end{cases} \tag{10}$$

where $a_2 > 0$, $b_2 > 0$ and $c_2 > 0$ are real constants, $w_1 = w_1^r + j w_1^i = u_{12} + j u_{22}$ and $w_2 = w_2^r + j w_2^i = u_{32} + j u_{42}$ are complex variables, $w_3 = u_{52}$ is a real variable.

Separating the real and imaginary parts of the drive system (10), we obtain the following real system:

$$\begin{cases} \dot{u}_{12} = a_2(u_{32} - u_{12}), \\ u_{22} = a_2(u_{42} - u_{22}), \\ \dot{u}_{32} = c_2 u_{12} - u_{12} u_{52} - u_{32}, \\ \dot{u}_{42} = c_2 u_{22} - u_{22} u_{52} - u_{42}, \\ \dot{u}_{52} = -b_2 u_{52} + u_{12} u_{32} + u_{22} u_{42}. \end{cases} \tag{11}$$

System (10) or (11) exhibits chaotic behavior in the case of $a_2 = 35, b_2 = 8/3, c_2 = 55$ with the initial conditions $t_0 = 0$, $u_{12}(0) = 1$, $u_{22}(0) = 2$, $u_{32}(0) = 5$, $u_{42}(0) = 4$, $u_{52}(0) = 3$. The corresponding chaotic attractor and its maximum Lyapunov exponent are depicted in figure 3. For more details of the complex dynamics of system (11), see [13].

The complex Wang system (2) is defined as the response system

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a_1(z_1 - z_2) + I_1^r + j I_2^i, \\ \dot{z}_2 = -c_1 z_2 + z_1 z_3 + I_3^r + j I_4^i, \\ \dot{z}_3 = -b_1 z_3 + \frac{1}{2} d_1(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) + I_5, \end{cases} \tag{12}$$

where $I_1^r + j I_2^i$ and $I_3^r + j I_4^i$ are the complex variable inputs and I_5 is a real variable input. The real version of the response system (12) reads

$$\begin{cases} \dot{u}_{11} = a_1(u_{11} - u_{31}) + I_1^r, \\ \dot{u}_{21} = a_1(u_{21} - u_{41}) + I_2^i, \\ \dot{u}_{31} = -c_1 u_{31} + u_{11} u_{51} + I_3^r, \\ \dot{u}_{41} = -c_1 u_{41} + u_{21} u_{51} + I_4^i, \\ \dot{u}_{51} = -b_1 u_{51} + d_1(u_{11} u_{31} + u_{21} u_{41}) + I_5. \end{cases} \tag{13}$$

According to the definition of anti-synchronization [5], we define the state errors as

$$\begin{cases} s_1^r = u_{11} + u_{12}, \\ s_2^i = u_{21} + u_{22}, \\ s_3^r = u_{31} + u_{32}, \\ s_4^i = u_{41} + u_{42}, \\ s_5 = u_{51} + u_{52}. \end{cases} \tag{14}$$

In order to obtain the anti-synchronization error system, we add system (11) to system (13) using formula (14) and obtain

$$\begin{cases} \dot{s}_1^r = -a_2 s_1^r - a_1 s_3^r + (a_1 + a_2)(u_{11} + u_{32}) + I_1^r, \\ \dot{s}_2^i = -a_2 s_2^i - a_1 s_4^i + (a_1 + a_2)(u_{21} + u_{42}) + I_2^i, \\ \dot{s}_3^r = -c_1 s_3^r - u_{52} s_1^r + u_{11} s_5 + c_2 u_{12} + (c_1 - 1) u_{32} + I_3^r, \\ \dot{s}_4^i = -c_1 s_4^i - u_{52} s_2^i + u_{21} s_5 + c_2 u_{22} + (c_1 - 1) u_{42} + I_4^i, \\ \dot{s}_5 = -b_1 s_5 + d_1(s_1^r u_{31} + s_4^i u_{21}) + s_2^i u_{42} + s^r(3) u_{12} \\ \qquad + (b_1 - b_2) u_{52} - (d_1 + 1)(u_{12} u_{31} + u_{21} u_{42}) + I_5. \end{cases} \tag{15}$$

We choose a Lyapunov function as

$$\begin{aligned} V(t) &= \tfrac{1}{2} S^T(t) S(t) \\ &= \tfrac{1}{2}[(s_1^r(t))^2 + (s_2^i(t))^2 + (s_3^r(t))^2 + (s_4^i(t))^2 + (s_5(t))^2], \end{aligned}$$

where $S = [s_1^r, s_2^i, s_3^r, s_4^i, s_5]^{\mathrm{T}}$ and T denotes the transpose. The derivative of $V(t)$ along the solution of the error

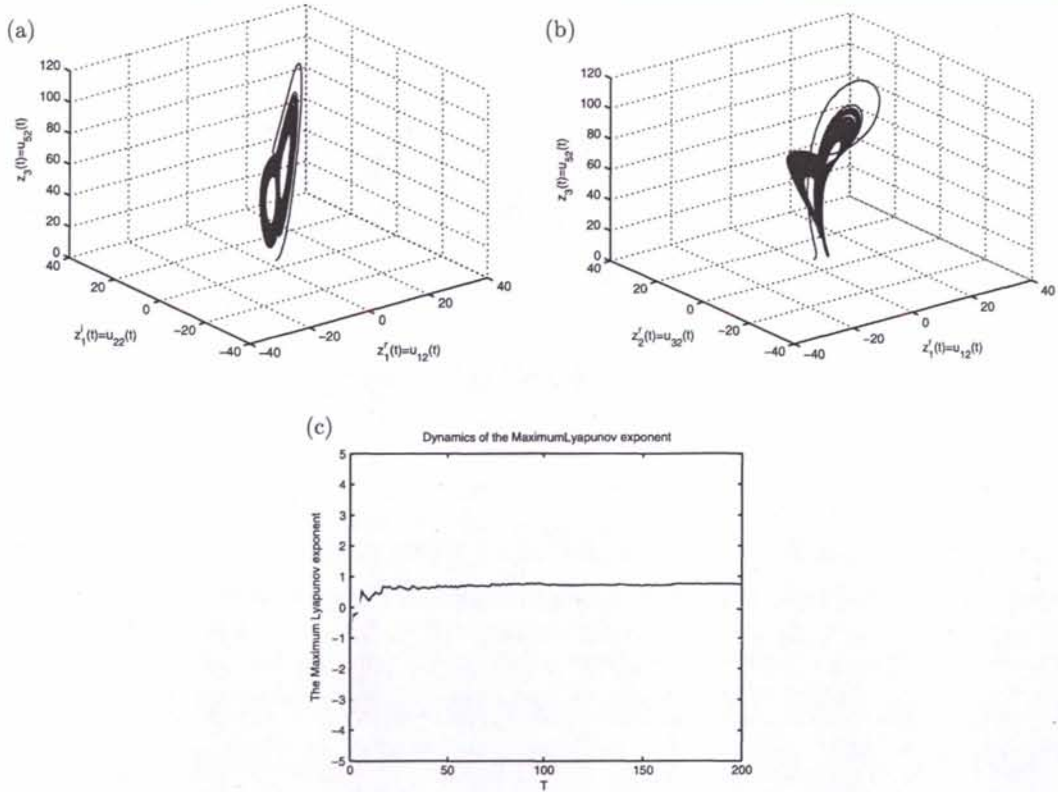


Figure 3. The attractor of complex Lorenz system (10) in different projections and its maximum Lyapunov exponent.

system (15) is

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \dot{s}_1^r s_1^r + \dot{s}_2^i s_2^i + \dot{s}_3^r s_3^r + \dot{s}_4^i s_4^i + \dot{s}_5 s_5 \\ &= [-a_2 s_1^r - a_1 s_3^r + (a_1+a_2)(u_{11}+u_{32}) + I_1^r] s_1^r \\ &\quad + [-a_2 s_2^i - a_1 s_4^i + (a_1+a_2)(u_{21}+u_{42}) + I_2^i] s_2^i \\ &\quad + [-c_1 s_3^r - u_{52} s_1^r + u_{11} s_5 + c_2 u_{12} + (c_1-1)u_{32} + I_3^r] s_3^r \\ &\quad + [-c_1 s_4^i - u_{52} s_2^i + u_{21} s_5 + c_2 u_{22} + (c_1-1)u_{42} + I_4^i] s_4^i \\ &\quad + [-b_1 s_5 + d_1(s_1^r u_{31} + s_4^i u_{21}) + s_2^i u_{42} + s_3^r u_{12} \\ &\quad + (b_1-b_2)u_{52} - (d_1+1)(u_{12}u_{31} + u_{21}u_{42}) + I_5] s_5. \end{aligned} \tag{16}$$

The control input functions I_1^r, I_2^i, I_3^r, I_4^i and I_5 are selected as

$$\begin{cases} I_1^r = a_1 s_3^r - (a_1+a_2)(u_{11}+u_{32}), \\ I_2^i = a_1 s_4^i - (a_1+a_2)(u_{21}+u_{42}), \\ I_3^r = u_{52} s_1^r - u_{11} s_5 - c_2 u_{12} - (c_1-1)u_{32}, \\ I_4^i = u_{52} s_2^i - u_{21} s_5 - c_2 u_{22} - (c_1-1)u_{42}, \\ I_5 = -d_1(s_1^r u_{31} + s_4^i u_{21}) - s_2^i u_{42} - s_3^r u_{12} - (b_1-b_2)u_{52} \\ \qquad + (d_1+1)(u_{12}u_{31} + u_{21}u_{42}), \end{cases} \tag{17}$$

and then equation (16) becomes

$$\dot{V}(t) = -[a_2(s_1^r)^2 + a_2(s_2^i)^2 + c_1(s_3^r)^2 + c_1(s_4^i)^2 + b_1(s_5)^2] < 0. \tag{18}$$

Since $V(t)$ is a positive definite function and its derivative is a negative definite function in the neighborhood of the zero solution of the error system (15), Lyapunov's methods imply that the equilibrium point $(s_1^r, s_2^i, s_3^r, s_4^i, s_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$ of the error system (15) is asymptotically stable, namely,

$$\lim_{t\to\infty} \|S(t)\| = \lim_{t\to\infty} \sum_{l=1}^{5} \|s_l\| = 0,$$

then the anti-synchronization between systems (3) and (11) is globally asymptotically achieved; that is, the complex Wang system (2) and the complex Lorenz system (10) are globally asymptotically anti-synchronized under the control input functions (17).

In order to verify the achievement of anti-synchronization between the complex Wang system (2) and the complex Lorenz system (10), we solve systems (11) and (13) with the control inputs (17) via the fourth-order Runge–Kutta integration method. The parameters of the complex Wang system (2) and the complex Lorenz system (10) are selected as $a_1 = 20$, $b_1 = 2$, $c_1 = 28$, $d_1 = 1$ and $a_2 = 1$, $b_2 = 2$, $c_2 = 10$, and we assume that the initial values of two systems

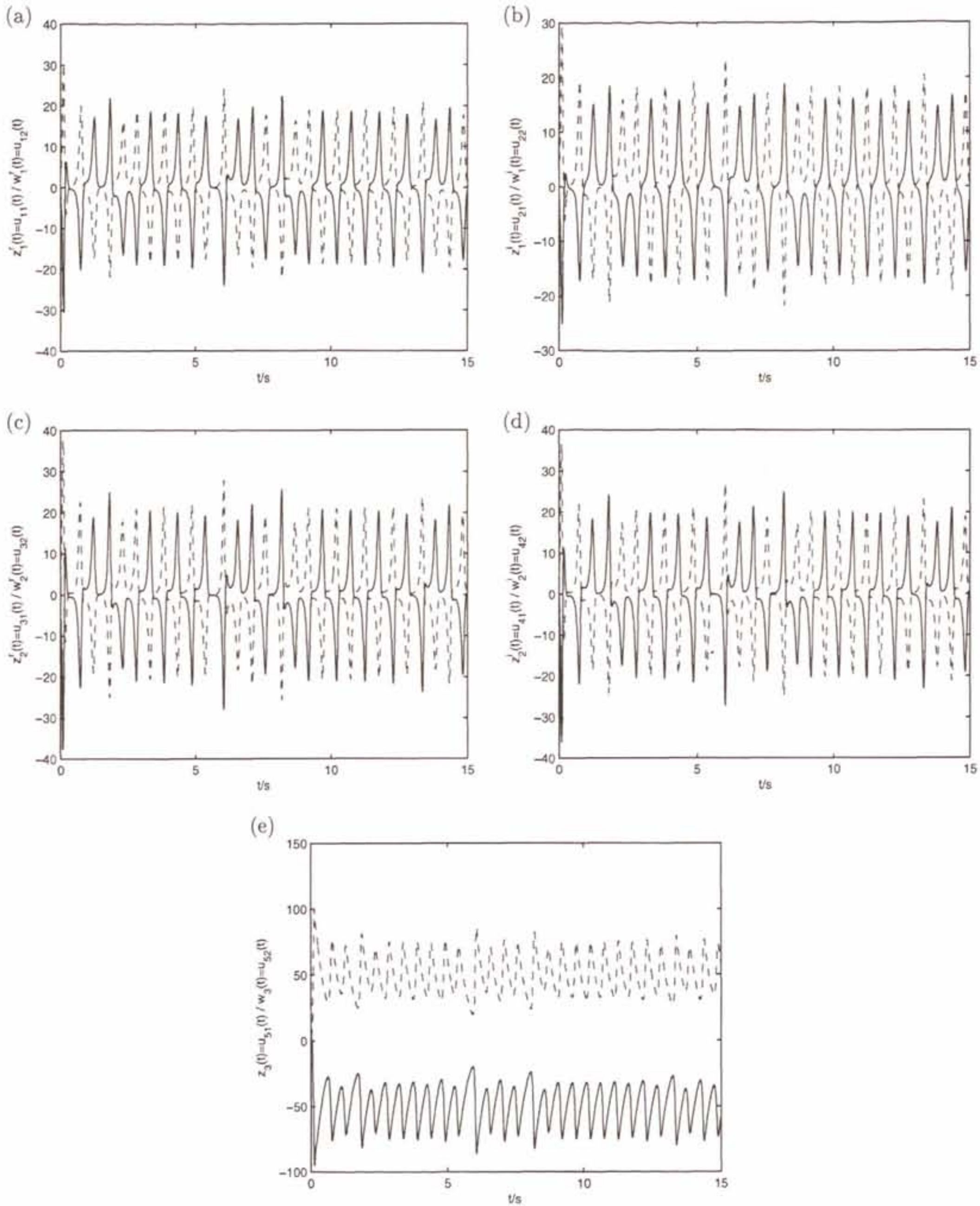


Figure 4. The anti-synchronization of the complex system (3) and the complex Lorenz system (13) with the control inputs (17).

are $(u_{11}(0), u_{21}(0), u_{31}(0), u_{41}(0), u_{51}(0)) = (2, 1, -4, 3, 4)$ and $(u_{12}(0), u_{22}(0), u_{32}(0), u_{42}(0), u_{52}(0)) = (1, 2, 3, 4, 3)$, respectively. The simulation results are depicted in figures 4 and 5.

Figure 4 shows that globally chaotic anti-synchronization of systems (3) and (11) is indeed achieved after a very small interval of time t. In figure 3, it can be seen that the anti-synchronization errors $s_1^r(t)$, $s_2^i(t)$, $s_3^r(t)$, $s_4^i(t)$ and $s_5(t)$ converge asymptotically to zero as $t \to \infty$, as expected from the above analytical considerations.

4. The anti-synchronization between the complex Wang system and a complex Lü system using nonlinear control

In this section, we discuss the anti-synchronization between the complex Wang system (2) and a complex Lü system via nonlinear control. The method is different from the active control discussed in the previous section, since the Lyapunov function is not required for calculation and the speed of achieving anti-synchronization of each state can also be controlled.

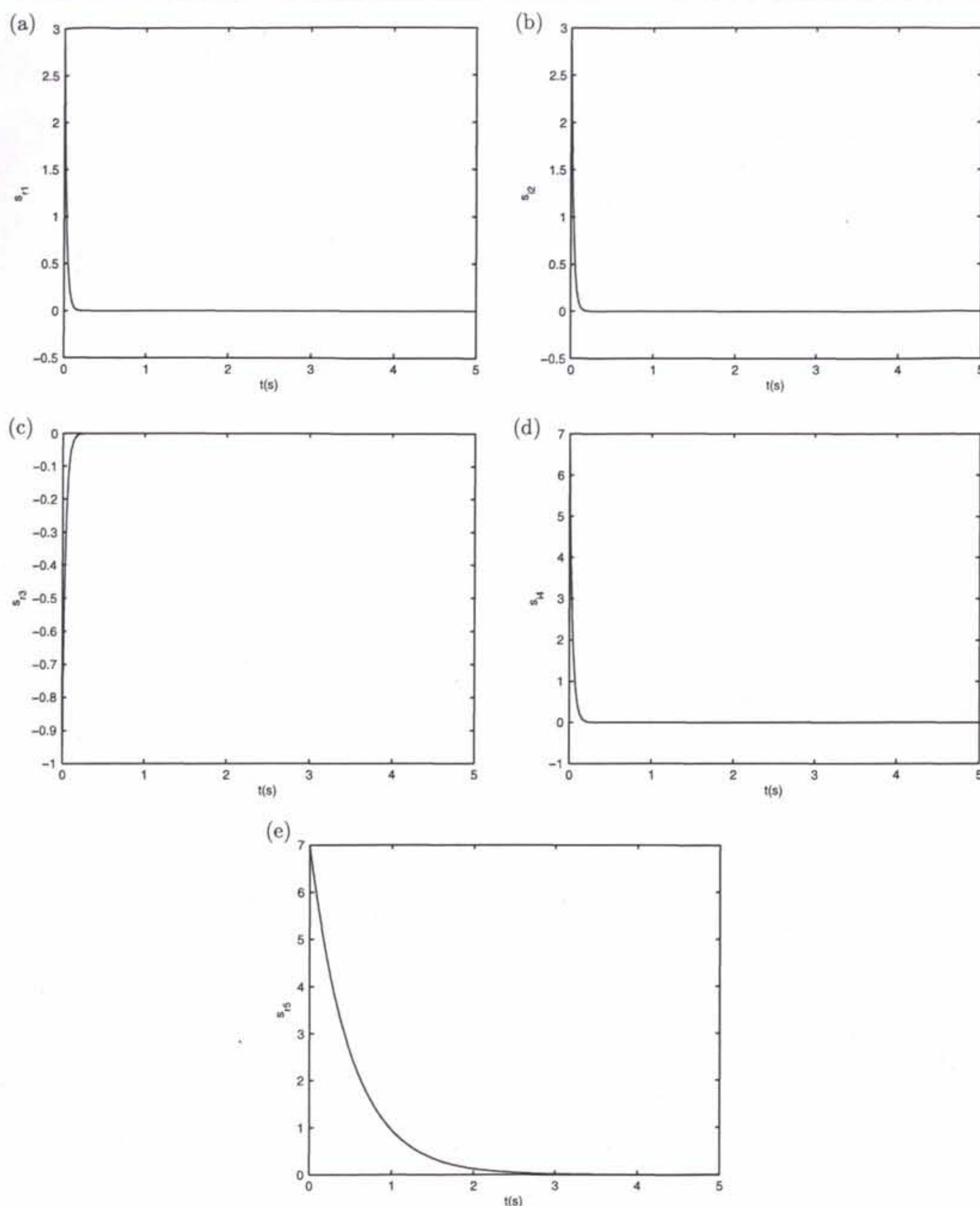


Figure 5. Dynamics of anti-synchronization errors between systems (3) and (17) under the controller (23).

In 2007, Mahmoud *et al* [15] introduced the complex Lü system and investigated its chaotic properties and synchronization. We take the complex Lü system

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = a_3(v_2 - v_1), \\ \dot{v}_2 = c_3 v_2 - v_1 v_3, \\ \dot{v}_3 = -b_3 v_3 + \frac{1}{2}(\bar{v}_1 v_2 + v_1 \bar{v}_2), \end{cases} \tag{19}$$

to be a drive system, where $v_1 = v_1^r + jv_1^i = u_{13} + ju_{23}$ and $v_2 = v_2^r + jv_2^i = u_{33} + ju_{43}$ are complex state variables and $v_3 = u_{53}$ is a real state variable.

Separating the real and imaginary parts of the complex Lü system (19), we have

$$\begin{cases} \dot{u}_{13} = a_3(u_{33} - u_{13}), \\ \dot{u}_{23} = a_3(u_{43} - u_{23}), \\ \dot{u}_{33} = c_3 u_{33} - u_{13} u_{53}, \\ \dot{u}_{43} = c_3 u_{43} - u_{23} u_{53}, \\ \dot{u}_{53} = -b_3 u_{53} + u_{13} u_{33} + u_{23} u_{43}. \end{cases} \tag{20}$$

It has a chaotic attractor as shown in figures 6(a) and (b), when $a_3 = 29, b_3 = 2, c_3 = 21$ and the initial values $u_{13}(0) = 4$,

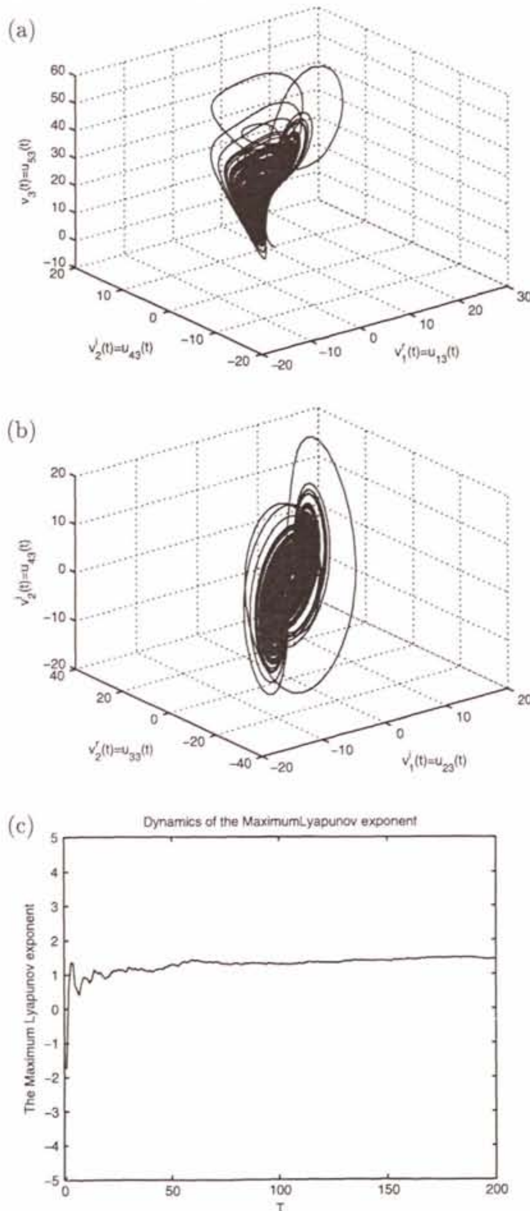


Figure 6. The attractor of the complex Lü system (19) in different projections and its maximum Lyapunov exponent.

$u_{23}(0)=-2,\ u_{33}(0)=3,\ u_{43}(0)=2,\ u_{53}(0)=-0.5$. The maximum Lyapunov exponent tends to an evidently positive value, just as was depicted in figure 6(c). For more details of the complex dynamics for the complex Lü system (19), see [15].

The complex Wang system (2) is also defined as a response system and its real version is obviously the same as system (13). The response system (13) tracks anti-synchronously system (20) defined as a drive system via the controllers $I_i (i=1,2,3,4,5)$ to be designed.

Similarly, anti-synchronous error systems are obtained as follows:

$$\begin{cases} \dot{s}_1^r = a_3(s_3^r - s_1^r) + (a_1+a_3)(u_{11}-u_{31}) + I_1^r, \\ \dot{s}_2^i = -a_3(s_4^i - s_2^i) + (a_1+a_3)(u_{21}-u_{41}) + I_2^i, \\ \dot{s}_3^r = -c_1 s_3^r + (c_1+c_3)u_{33} + u_{11}u_{51} - u_{13}u_{53} + I_3^r, \\ \dot{s}_4^i = -c_1 s_4^i + (c_1+c_3)u_{43} + u_{21}u_{51} - u_{23}u_{53} + I_4^i, \\ \dot{s}_5 = -b_1 s_5 + (b_1-b_3)u_{53} + u_{13}u_{33} + u_{23}u_{43} \\ \qquad + d_1(u_{11}u_{31} + u_{21}u_{41}) + I_5. \end{cases} \tag{21}$$

Then, we design the controllers of system (20) as

$$\begin{cases} I_1^r = a_3(s_1^r - s_3^r) - (a_1+a_3)(u_{11}-u_{31}) - k_1 s_1^r, \\ I_2^i = a_3(s_2^i - s_4^i) - (a_1+a_3)(u_{21}-u_{41}) - k_2 s_2^i, \\ I_3^r = -(c_1+c_3)u_{33} + (c_1-k_3)s_3^r + u_{13}u_{53} - u_{11}u_{51}, \\ I_4^i = -(c_1+c_3)u_{43} + (c_1-k_4)s_4^i + u_{23}u_{53} - u_{21}u_{51}, \\ I_5 = (b_1-k_5)s_5 + (b_3-b_1)u_{53} - u_{13}u_{33} - u_{23}u_{43} \\ \qquad - d_1(u_{11}u_{31} - u_{21}u_{41}), \end{cases} \tag{22}$$

where $k_n > 0$ $(n=1,2,3,4,5)$ are real numbers and used to control the speed of achieving anti-synchronization.

Substituting the controllers (22) into the error system (21), we obtain

$$\begin{cases} \dot{s}_1^r = -k_1 s_1^r, \\ \dot{s}_2^i = -k_2 s_2^i, \\ \dot{s}_3^r = -k_3 s_3^r, \\ \dot{s}_4^i = -k_4 s_4^i, \\ \dot{s}_5 = -k_5 s_5. \end{cases} \tag{23}$$

The error system (23) can be written as a linear system

$$\dot{S} = AS,$$

where $S=[s_1^r, s_2^i, s_3^r, s_4^i, s_5]^{\mathrm{T}}$, $A=\mathrm{diag}(-k_1, -k_2, -k_3, -k_4, -k_5)$. It is clear that all eigenvalues of the closed loop system (23) are $-k_1$, $-k_2$, $-k_3$, $-k_4$, $-k_5$ and are negative real parts; hence anti-synchronization between the complex Wang system (2) and the complex Lü system (19) is realized.

The control coefficients $k_1=1.5, k_2=1, k_3=0.5, k_4=2$ and $k_5=1.5$ are taken and systems (20) and (13) with the controllers (22) are solved numerically using the fourth-order Runge–Kutta integration method, for $a_3=29, b_3=2, c_3=21$ of system (20) and $a_1=20,\ b_1=2,\ c_1=28,\ d_1=1$ of system (3) and the initial values $(u_{13}(0),\ u_{23}(0),\ u_{33}(0),\ u_{43}(0),\ u_{53}(0))=(4,\ -2,\ 3,\ 2,\ -0.5)$ and $(u_{11}(0),\ u_{21}(0),\ u_{31}(0),\ u_{41}(0),\ u_{51}(0))=(2,\ 1,\ -5,\ 3,\ 4)$. The simulation results are qualitatively very similar to those demonstrated in figures 4 and 5. The solutions of systems (20) and (13) show that chaos anti-synchronization is again achieved after very small time intervals. As expected, the anti-synchronization errors $s_1^r(t)$, $s_2^i(t)$, $s_3^r(t)$, $s_4^i(t)$ and $s_5(t)$ are also found to asymptotically converge to zero in this case.

On the other hand, the control coefficients k_n $(n=1,2,3,4,5)$ can be chosen properly in advance to regulate the

speed of achieving anti-synchronization between systems (3) and (20). The larger the coefficient, the higher the speed of achieving anti-synchronization.

5. Conclusion

This paper discusses the basic dynamic properties of the complex Wang system (2), and implements separately anti-synchronization between the complex Wang system (2) and a complex Lorenz system and that between the complex Wang system and a complex Lü system via active control and nonlinear control. The design process of the controller via active control is that, based on the Lyapunov function constructed, the designed controller meets the Lyapunov stability conditions for achieving anti-synchronization of complex chaotic systems. On the other hand, in the application of nonlinear control the Lyapunov function is not required to be calculated and the nonlinear error system is written as the linear system; then anti-synchronization is achieved using the stability conditions of linear control theory. Although the anti-synchronization of complex systems is achieved via both methods, nonlinear control is preferable for personal purposes and simpler for computations. Numerical simulations verify that both methods are effective in achieving anti-synchronization of the complex Wang system.

Acknowledgments

The work was partially supported by the NNSF of China (numbers 60874009 and 10971120) and the NSF of Shandong province (number ZR2010FM010).

References

[1] Pecora L M and Carroll T L 1990 Synchronization in chaotic systems *Phys. Rev. Lett.* **64** 821

[2] Erjaee G H and Momani S 2008 Phase synchronization in fractional differential chaotic systems *Phys. Lett.* A **372** 2350

[3] Chen Y, Chen X X and Gu S S 2007 Lag synchronization of structurally nonequivalent chaotic systems with time delays *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* **66** 1929

[4] Sun M, Tian L X and Xu J 2006 Time-delayed feedback control of the energy resource chaotic system *Int. J. Nonlinear Sci.* **3** 172

[5] Zhang Y and Sun J 2004 Chaotic synchronization and anti-synchronization based on suitable separation *Phys. Lett.* A **330** 442

[6] Li W, Chen X and Shen Z 2008 Anti-synchronization of two different chaotic systems *Physica* A **387** 3747

[7] Kim C M, Rim S H and Key W 2003 Anti-synchronization of chaotic oscillators *Phys. Lett.* A **320** 39

[8] Li G H and Zhou S P 2007 Anti-synchronization in different chaotic systems *Chaos Solitons Fractals* **32** 516

[9] Genesio R and Tesi A 1992 Harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems *Automatica* **28** 531

[10] Mahmoud G M, Mohamed A A and Aly S A 2001 Strange attractors and chaos control in periodically forced complex Duffing's oscillators *Physica* A **292** 193

[11] Xu Y, Xu W and Mahmoud G M 2005 On a complex Duffing system with random excitation *Chaos Solitons Fractals* **23** 399

[12] Xu Y, Mahmoud G M, Xu W and Lei Y M 2005 Suppressing chaos of a complex Duffing's system using a random phase *Chaos Solitons Fractals* **23** 265

[13] Rauh A, Hannibal L and Abraham N 1996 Global stability properties of the complex Lorenz model *Physica* D **99** 45

[14] Fowler A C, Gibbon J D and McGuinnes M T 1983 The real and complex Lorenz equations and their relevance to physical systems *Physica* D **7** 126

[15] Mahmoud G M, Bountis T and Mahmoud E E 2007 Active control and global synchronization for complex Chen and Lü systems *Int. J. Bifurcation Chaos* **17** 4295

[16] Mahmoud G M, Bountis T, AbdEl-Latif G M and Mahmoud E E 2009 Chaos synchronization of two different complex Chen and Lü systems *Nonlinear Dyn.* **55** 43

[17] Mahmoud G M and Mahmoud E E 2010 Phase and antiphase synchronization of two identical hyperchaotic complex nonlinear systems *Nonlinear Dyn.* **61** 141

[18] Wang J Z, Chen Z Q and Yuan Z Z 2006 A new chaotic system and analysis of its properties *Acta Phys. Sin.* **55** 3956

[19] Xu J and Cai G 2007 Adaptive backstepping control of new chaotic system *J. Jiangsu Univ. Sci. Technol.: Nat. Sci. Ed.* **21** 86

[20] Xu J and Cai G 2008 Nonlinear feedback synchronization of new chaotic system *J. Jiangsu Univ. Sci. Technol.: Nat. Sci. Ed.* **22** 86

[21] Wolf A, Swift J, Swinney H and Vastano J 1985 Determining Lyapunov exponents from a time series *Physica* D **16** 285

学位论文评阅及答辩情况表

	姓　名	专业技术职务	是否博导	所在单位	总体评价※
论文评阅人	匿名1				B
	匿名2				A
	刘常春	教授	是	山东大学	A

		姓　名	专业技术职务	是否博导	所在单位
答辩委员会成员	主席	崔洪亮	教授	是	吉林大学
	委员	贾磊	教授	是	山东大学
		隋青美	教授	是	山东大学
		李歧强	教授	是	山东大学
		王孝红	教授	是	中科院

答辩委员会对论文的总体评价※	A	答辩秘书	姜明顺	答辩日期	2012-5-17
备注					

※优秀为“A”；良好为“B”；合格为“C”；不合格为“D”。

复动力系统的空间分形控制与混沌同步

作者：　　刘平
学位授予单位：　　山东大学